J. PERELMANAS

ĮDOMIOJI ARITMETIKA

MĮSLĖS IR KEISTENYBĖS SKAIČIŲ PASAULYJE

VERSTA IŠ AŠTUNTOJO, SUTRUMPINTO LEIDIMO

VALSTYBINĖ
POLITINĖS IR MOKSLINĖS LITERATŪROS LEIDYKLA
VILNIUS — 1956

Перельман Яков Исидоровнч

ЗАНИМАТЕЛЬИАЯ АРИФМЕТИКА

На лнтовском языке

Перевод с русского восьмого, сокращенного издаиия
(Детгиз, 1954)

Госполнтнаучнздат Лит. ССР, 1956

Vertė *V. Radvilavičius*
Vertimo redaktorius *Alg. Čižas*
Viršelis dailininko *A. Vitkausko*
Techn. redaktorius *V. Cečytė* Korektorius *A. Morgenšternienė*

Leidinys Nr. 3721 Tiražas 10 000 egz.
Pasirašyta spausdinti 1956.VI.11. LV 01189.
Popier. 84×108/32=2,6875 pop. l. 8,72 sp. l. 8,36 apsk. l. l.
38 377 ž. 1 sp. l. Kaina Rb. 3,50.

Spaudė valst. „Vaizdo" sp. Vilniuje, Strazdelio 2. Užs. Nr. 670.

PIRMASIS SKYRIUS

SENA IR NAUJA APIE SKAITMENIS IR NUMERACIJĄ

PASLAPTINGI ŽENKLAI

1917 metų kovo mėnesį Leningrado (tuomet — Petrogrado) gyventojus nemaža suglumino ir net nugąsdino paslaptingi ženklai, nežinia kaip atsiradę prie daugelio butų durų. Paskalos įvairiai aiškino tų ženklų reikšmę. Mano matytieji ženklai buvo besikaitaliojančių šauktukų ir kryžių formos.

Plito nelaimę lemią gandai apie plėšikų gaujas, pažyminčias būsimų aukų butus. „Laikinosios vyriausybės Petrogrado m. komisaras“, ramindamas gyventojus, tvirtino, kad „paslaptingi kryžių, raidžių ir figūrų pavidalo ženklai, daromi kažkieno nematomos rankos ant taikių miestelėnų durų, kaip parodė atlikta kvota, yra provokatorių ir vokiečių šnipų darbas“; jis kvietė gyventojus trinti ir naikinti visus ženklus, „o asmenis, pastebėtus darant tokius ženklus, sulaikyti ir nuvesti ten, kur reikia“.

Paslaptingi šauktukai ir nelaimę lemią kryžiai atsirado taip pat ant mano buto ir mano kaimynų butų durų. Tačiau šioks toks mano patyrimas, įgytas sprendžiant painius uždavinius, padėjo man įspėti to slaptaraščio nesudėtingą ir visiškai nebaisią paslaptį.

Savo mintis aš išdėsčiau miesto gyventojams, įdėjęs į laikraštį tokį straipsnelį:

„PASLAPTINGI ZENKLAI

Ryšium su paslaptingais ženklais, atsiradusiais ant daugelio Petrogrado namų sienų, ne pro šalį išsiaiškinti prasmę vienos kategorijos panašių ženklų, kurie, nepaisant jų nelaimę lemiančios formos, yra visai nekaltos kilmės. Aš kalbu apie šitokio tipo ženklus:

Panašūs ženklai pastebėti daugelyje namų ant užpakalinių laiptų, prie butų durų. Paprastai šio tipo ženklai yra prie **visų** to namo durų, be to, viename name dviejų vienodų ženklų nepastebima. Jų niūrūs brėžiai, suprantama, kelia gyventojams nerimą. Tuo tarpu jų prasmė, visiškai nekalta, lengvai įspėjama, sugretinus juos su atitinkamų butų numeriais. Pavyzdžiui, mano aukščiau parodytus ženklus aš pastebėjau prie dvylikto, dvidešimt penkto ir trisdešimt trečio butų durų.

12 25 33

Nesunku suvokti, kad kryžiai reiškia dešimtis, o lazdelės — vienetus. Taip buvo **visais be išimties atvejais**, kuriuos man teko pastebėti. Šią savotišką numeraciją, matyt, padarė kiemsargiai-kinai [1], nesuprantantieji

[1] Tuomet Petrograde jų buvo daug. Vėliau aš sužinojau, kad kiniškas ieroglifas, atitinkantis dešimtį, yra kaip tik nurodytos kryžiaus formos (kinai nenaudoja mūsų „arabiškų" skaitmenų).

mūsų skaitmenų. Žinoma, tie ženklai atsirado seniai, bet piliečių dėmesį jie patraukė tiktai vasario revoliucijos dienomis"[1].

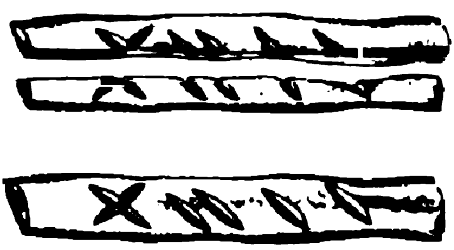
Tokios pat formos paslaptingi ženklai, tiktai ne su tiesiais, bet į s t r i ž a i s kryžiais, buvo pastebėti ir tokiuose namuose, kuriuose kiemsargiais tarnavo atėję iš kaimų rusų valstiečiai. Čia jau nesunku buvo išaiškinti tikruosius „slaptaraščio" autorius, kurie net neįtarė, kad jų primityvūs butų numerių pažymėjimai buvo pastebėti tiktai dabar ir sukėlė tokį sąmyšį.

SENOVINĖ LIAUDINĖ NUMERACIJA

Iš kur paėmė Petrogrado kiemsargiai šį paprastą skaičių žymėjimo būdą: kryžiai — dešimtys, lazdelės — vienetai? Aišku, jie neišsigalvojo tų ženklų mieste, bet atsinešė juos iš gimtųjų kaimų. Ši „numeracija" jau seniai plačiai buvo naudojama ir suprantama kiekvienam, net anksčiau neraštingam valstiečiui. Be abejo, ji atsirado gilioje senovėje ir buvo naudojama ne tiktai pas mus. Nekalbant jau apie gimininingumą su kinišku ženklinimu, krinta į akis šios supaprastintos numeracijos panašumas į romėniškąją: ir romėnų skaitmenyse lazdelės reiškia vienetus, o įstriži kryžiai — dešimtis.

Įdomu, kad ši liaudinė numeracija buvo kažkada pas mus net įstatymu įteisinta: kaip tik pagal tokią sistemą, tik labiau išvystytą, mokesčių rinkėjai turėjo daryti įrašus mokesčių sąsiuvinyje. „Rinkėjas, — skaitome senajame „Įstatymų rinkinyje", — priimdamas iš kurio nors namų

[1] Mūsų dienų skaitytojui, tikriausia, atrodys labai keista, kad iki vasario revoliucijos dienų tų ženklų niekas nepastebėjo. Tačiau priminsiu, kad dauguma gyvenusiųjų butuose su dviem įėjimais paprastai naudodavosi tiktai paradiniais laiptais ir tiktai revoliucijos dienomis, kada paradinės durys buvo uždarytos, pirmąkart ėmė vaikščioti pro užpakalines duris.



Lazdelė su įkirčiais, kuria nuo seno naudojosi neraštingi rusų valstiečiai skaičiavimams užrašyti. Paprasti įkirčiai pažymi vienetus, įstriži kryžiai — dešimtis. Jeigu ši lazdelė būdavo perskeliama pusiau, tai abi jos puselės atstodavo skaičiavimo dokumentus, kurių negalima suklastoti, nes neįmanoma pagaminti tokią suklastotą puselę, kuri tikrinant tiksliai sutaptų su tikrąja.

šeimininko jam mokamus pinigus, privalo pats arba per raštininką įrašyti mokesčių sąsiuvinyje ties to namų šeimininko pavarde, kurią dieną kiek pinigų gauta, pažymėdamas priimtos sumos dydį skaitmenimis ir **ženklais**. Tuos ženklus įvesti visur vienodus, kad juos žinotų visi ir kiekvienas, o būtent:

dešimtį rublių pažymėti ženklu	□
rublį	○
dešimtį kapeikų . . .	X
kapeiką	I
ketvirtį	—

Pavyzdžiui, dvidešimt aštuoni rubliai penkiasdešimt septynios kapeikos trys ketvirčiai:

□□○○○○○○○○XXXXXIIIIIII≡

To paties „Įstatymų rinkinio“ tomo kitoje vietoje randame dar kartą nurodymą, kad liaudinių skaitmeninių ženklų naudojimas yra privalomas. Nustatomi specialūs ženklai tūkstančiui rublių — šešiakampė žvaigždė su kryžiumi jos viduje, ir šimtui rublių — ratas su aštuoniais stipinais. Tačiau rubliui ir dešimčiai kapeikų ženklai čia nustatomi kitokie, negu aukščiau minėtame įstatyme.

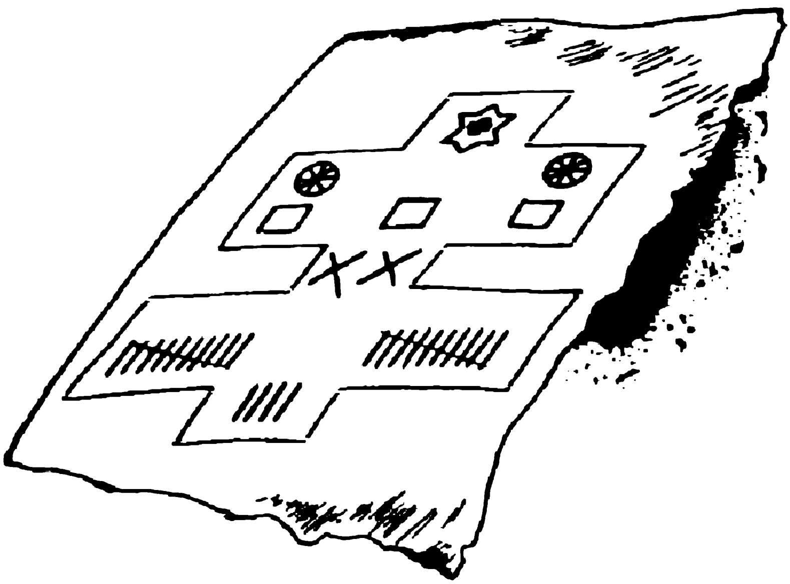
Štai įstatymo apie tuos vadinamuosius „mokestinius ženklus“ tekstas:

„Kad kiekviename kvite, išduotame įnešusiam mokestį Kilmingajam Seniūnui, be išdėstymo žodžiais, būtų parodytas sumokėtų rublių ir kapeikų skaičius ypatingais ženklais taip, kad sumokantieji, paprastai perskaitę tą skaičių, galėtų būti tikri parodymo teisingumu“ [1].

Kvite vartojami ženklai reiškia:

✡ — 1000 rub.,
❂ — 100 rub.,
□ — 10 rub.,
× — 1 rub.,
|||||||||| — 10 kap.,
| — 1 kap.

„Kad negalima būtų padaryti čia jokių priedų, visus tokius ženklus apibrėžti aplinkui tiesiomis linijomis“. Pavyzdžiui: 1232 rub. 24 kap. vaizduojama taip:



Senovinis, liaudiniais skaitmeniniais ženklais parašytas kvitas apie 1232 rub. 24 kap. jasako (mokesčio) sumokėjimą.

Kaip matote, mūsų vartojami arabiškieji ir romėniškieji skaitmenys — ne vienintelis skaičių žymėjimo būdas. Senovėje pas mus buvo vartojamos kitokios rašytinio skaičia-

[1] Tai rodo, kad aprašytieji ženklai gyventojų buvo plačiai vartojami.

vimo sistemos, mažai panašios į romėniškus ir visai nepanašios į arabiškus skaitmenis.

Bet ir tai dar ne visi skaičių vaizdavimo būdai, kokie buvo vartojami praktikoje: pavyzdžiui, daugelis pirklių turėjo savus slaptus ženklus skaičiams žymėti, — vadinamąsias prekybines „žymes". Apie jas dabar smulkiau pakalbėsime.

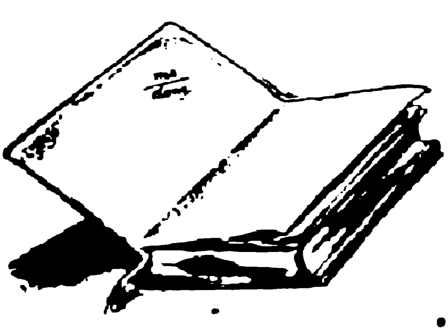
SLAPTOS PREKYBINĖS ŽYMĖS

Ikirevoliuciniais laikais ant daiktų, pirktų pas kromininkus arba privačiose krautuvėse, ypač provincinėse, buvo galima dažnai pastebėti nesuprantamus raidinius ženklinimus, kaip antai

k is *i un.*

Tai ne kas kita, kaip tikroji daikto kaina, kurią pirklys pasižymėdavo tiesiog ant prekės, tačiau tokiu būdu, kad pirkėjas negalėtų jos įspėti. Pirklys, žvilgterėjęs į raides, iš karto suvokdavo jų paslėptą prasmę ir pirkėjui pasakydavo padidintą kainą — su užprašymu.

Žymėjimo sistema buvo visiškai paprasta. Pirklys pasirinkdavo kokį nors žodį, susidedantį iš dešimties skirtingų raidžių, pavyzdžiui: *dėkingumas, dokumentas, kilometras, beržynėlis* ir pan. Žodžio pirmoji raidė reiškė 1, antroji — 2, trečioji — 3 ir t. t.; dešimtoji raidė reiškė nulį. Šių sutartinių raidžių-skaitmenų pagalba pirklys ir pažymėdavo tiesiog ant prekių jų kainą, laikydamas didžiausioje paslaptyje savo pelno sistemos „raktą".



Knygos kaina, pirklio užrašyta slapto dešimties raidžių žodžio pagalba.
Užrašas reiškia, kad pačiam knyga kainuoja 50 kap., o pardavimo kaina — 1 rub. 25 kap.

Jeigu, pavyzdžiui, buvo parinktas žodis:

d ė k i n g u m a s
1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

tai kaina, lygi 4 rub. 75 kap., buvo žymima tokiu būdu:

i un.

Kai kada prekės kaina buvo rašoma trupmenos pavidalo; pavyzdžiui, vienoje mano pirktoje knygoje (žr. piešinį) yra ženklas

$$\frac{ms}{dom}.$$

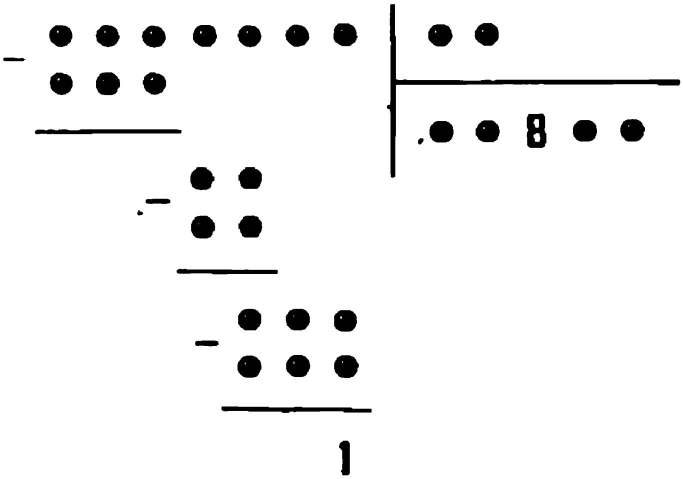
Reiškia, tuo atveju, kai raktas „dokumentas", reikia užprašyti 1 rub. 25 kap., o pačiam knyga kainavo 50 kap.

VIETOJ SKAITMENŲ — PĖSTININKAI

Po to, kas jau buvo kalbėta, lengva suprasti, kad skaičius galima vaizduoti ne tiktai skaitmenimis, bet ir įvairiais kitokiais ženklais arba net daiktais: pieštukais, plunksnomis, liniuotėmis, trintukais ir pan., reikia tik sutarti kiekvienam daiktui skirti kurio nors vieno skaitmens reikšmę. Su tokiais skaičiais-daiktais galima vaizduoti, kaip kuriozą, net skaičių veiksmus: sudėtį, atimtį, daugybą, dalybą.

Viename užsieniniame šachmatų žurnale buvo duotas uždavinys: atskleisti tikrąją prasmę tokio skaičių dalybos pavyzdžio, kuriame beveik visi skaitmenys pakeisti pėstininkais (mūsų piešinyje — juodais skrituléliais). Iš 28 skaitmenų žinomi tik du: vienas (8) dalmenyje, kitas (1) liekanoje. Atrodytų, kad surasti kitų 26 skaitmenų, pažymėtų skrituléliais, reikšmes, neįmanoma. Tuo tarpu kiekvienam, kas gerai supranta atskirų dalybos veiksmo operacijų prasmę, tai yra palyginti nesudėtingas uždavinys. Štai kaip samprotaudami mes pasieksime tikslą.

Aišku, kad antrasis skaitmuo dalmenyje yra 0. Taip turi būti, nes prie pirmosios atimties liekanos nukelta ne vienas, o du skaitmenys: aišku, kad nukėlus pirmąjį skaitmenį susidarė skaičius, mažesnis už daliklį; o tokiais atvejais atitinkamas skaitmuo dalmenyje yra 0.



Pamėginkite surasti šios dalybos visų skaitmenų reikšmes!

Panašiai samprotaudami, darome išvadą, kad ketvirtasis dalmens skaitmuo yra taip pat 0.

Įsižiūrėję į skritulėlių išdėstymą, pastebime, kad dviženklis daliklis, padaugintas iš 8, duoda dviženklį skaičių, o padauginus jį iš dalmens pirmojo (kol kas nežinomo) skaitmens, gaunamas triženklis skaičius. Reiškia, pirmasis dalmens skaitmuo yra didesnis už 8; toks skaitmuo gali būti tiktai 9.

Panašiu būdu nustatome, kad ir paskutinis dalmens skaitmuo — 9.

Tokiu būdu mes suradome dalmenį: 90 809. Dabar belieka rasti daliklio reikšmę. Mes žinome, kad daliklis susideda iš dviejų skaitmenų; be to, skritulėlių išdėstymas rodo, kad šitas dviženklis skaičius, padaugintas iš 8, duoda taip pat dviženklį skaičių, o padaugintas iš 9, duoda sandaugą, sudarytą jau iš t r i j ų skaitmenų. Koks gi tas skaičius? Atliksime bandymus, pradėdami nuo mažiausio dviženklio skaičiaus — 10:

$$10 \times 8 = 80,$$
$$10 \times 9 = 90.$$

Matome, kad skaičius 10 nepatenkina keliamų reikalavimų: abi sandaugos dviženklės. Pabandysime sekantį dviženklį skaičių — 11:

$$11 \times 8 = 88,$$
$$11 \times 9 = 99.$$

Skaičius 11 taip pat, aišku, netinka: vėl abi sandaugos dviženklės. Bandome 12:

$$12 \times 8 = 96,$$
$$12 \times 9 = 108.$$

Skaičius 12 patenkina visus reikalavimus. Ar nėra daugiau tokių skaičių? Bandome 13.

$$13 \times 8 = 104,$$
$$13 \times 9 = 117.$$

Abi sandaugos triženklės; vadinasi, 13 netinka. Aišku, kad netinka ir visi skaičiai, didesni už 13.

Tokiu būdu, vienintelis galimas daliklis — 12. Žinodami daliklį, dalmenį ir liekaną, lengvai surandame dalijamąjį ir atkuriame visą dalybos veiksmą.

Tokiu būdu,

$$\text{dalijamasis} = 90\,809 \times 12 + 1 = 1\,089\,709.$$

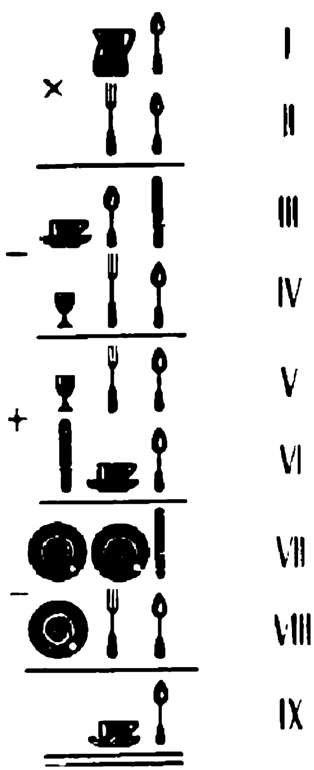
Dalybos veiksmas:

```
1089709 | 12
108     |-----
------- | 90809
  97
  96
  ---
   109
   108
   ---
     1
```

Kaip matome, iš dviejų žinomų skaitmenų mums pavyko nustatyti 26 nežinomų skaitmenų reikšmes.

ARITMETIKA PUSRYČIAUJANT

Priešais mus eilė skaičiavimo veiksmų, kuriuose skaičiai pažymėti stalo servizo daiktais (žr. piešinį). Šakutė, šaukštas, peilis, ąsotėlis, lėkštė — tai vis ženklai, iš kurių kiekvienas pakeičia tam tikrą skaitmenį.



Įspėkite, su kokiais skaičiais atliekami čia parodytieji aritmetiniai veiksmai!

Žiūrėdami į šitą peilių, šakučių, įvairių indų grupę, pabandykite įspėti: kokie būtent skaičiai čia pažymėti?

Iš pirmo žvilgsnio uždavinys atrodo labai sunkus: reikia įspėti tikrus ieroglifus [1], kaip tai savo laiku padarė prancūzas Šampoljonas [2]. Tačiau jūsų uždavinys žymiai lengvesnis. Jūs juk žinote, kad čia skaičiai, nors ir pažymėti šakutėmis, peiliais, šaukštais ir pan., išdėstyti pagal dešimtainę skaičiavimo sistemą, t. y. jūs žinote, kad lėkštė, stovinti antroje vietoje (skaičiuojant iš dešinės), yra skaitmuo, pažymintis dešimtis, kad daiktas, stovintis jos dešinėje, atitinka vienetinį skaitmenį, o kairėje — šimtų skaitmenį. Be to, jūs žinote, kad visų tų daiktų išdėstymas turi tam tikrą prasmę, pagrįstą aritmetiniais veiksmais, atliekamais su skaičiais, kuriuos pažymi tie daiktai. Visa tai gali žymiai palengvinti jums siūlomo uždavinio sprendimą.

Štai kokiu būdu galima surasti čia išdėstytų daiktų reikšmes. Įsižiūrėję į tris pirmąsias mūsų piešinio eilutes, matote, kad „šaukštas“, padaugintas iš „šaukšto“, duoda

[1] Ieroglifas — figūrinis ženklas, kuris pažymi arba ištisas sąvokas, arba atskirus kalbos skiemenis ir garsus.

[2] Šampoljonas (1790—1832) — žymus prancūzų filologas, sukūręs pagrindus egiptologijai — mokslui, tyrinėjančiam senovės Egipto ir gretimų šalių kalbą, istoriją ir kultūrą.

„peilį“. O iš sekančių eilučių matyti, kad, iš „peilio“ atėmus „šaukštą“, gaunamas „šaukštas“ arba kad, prie „šaukšto“ pridėjus „šaukštą“, gaunamas „peilis“. Koks skaitmuo duoda vieną ir tą patį rezultatą ir padvigubintas, ir padaugintas pats iš savęs? Tai tegali būti tiktai 2, nes $2 \times 2 = 2 + 2$. Tokiu būdu sužinome, kad „šaukštas“ pažymi 2, o „peilis“ — 4.

Dabar einame toliau. Koks skaitmuo pažymėtas „šakutė“? Pabandysime įspėti jį, įsižiūrėję į tris pirmąsias eilutes, kur „šakutė“ įeina į daugybą, ir į *III, IV* ir *V* eilutes, kur ta pati „šakutė“ figūruoja atimties veiksme. Iš atimties grupės matote, kad, dešimčių skyriuje iš „šaukšto“ atėmę „šakutę“, gauname „šakutę“, t. y. iš dvejeto atėmę „šakutę“, gauname „šakutę“. Tai gali būti dviem atvejais: arba „šakute“ pažymėtas 1, ir tuomet $2 - 1 = 1$; arba „šakutė“ pažymi 6, ir tuomet, atėmę 6 iš 12 (aukštesnio skyriaus vienetas paskolinamas iš „puodelio“), gauname 6.

Kurį gi pasirinkti: 1 ar 6? Pabandysime, ar skaitmuo 6 tinka „šakutei“ kituose veiksmuose. Atkreipkite dėmesį į *V* ir *VI* eilučių sudėtį: „šakutė“ (t. y. 6), pridėta prie „puodelio“, duoda „lėkštę“; reiškia, „puodelis“ turi būti mažesnis už 4 (nes, *VII* ir *VIII* eilutėse iš „lėkštės“ atėmę „šakutę“, gauname „puodelį“). Bet „puodelis“ jau negali būti dvejetu, nes dvejetas jau pažymėtas „šaukštu“; „puodelis“ negali būti taip pat ir vienetu — priešingu atveju, iš *III* eilutės atėmę *IV* eilutę, negautume triženklio skaičiaus *V* eilutėje. Pagaliau „puodeliu“ negalima pažymėti ir 3 — štai kodėl: jeigu „puodelį“ laikytume 3, tai „taurelė“ (*IV* ir *V* eilutės) turėtų būti laikoma vienetu, nes $1 + 1 = 2$, t. y. „taurelė“, sudėta su „taurele“, duoda „puodelį“, sumažintą vienetu, kuris buvo paskolintas iš jo atliekant atimties veiksmą dešimčių skyriuje; „taurelė“ taip pat negali būti laikoma vienetu, nes tuomet *VII* eilutėje „lėkštė“ vienu atveju pažymės skaitmenį 5 („taurelė“, sudėta su „peiliu“), o kitu — skaitmenį 9 („šakutė“, pridėta prie „puodelio“).

o tai yra neįmanoma. Reiškia, „šakutės“ negalima buvo laikyti skaitmeniu 6, o reikėjo laikyti vienetu.

Sužinoję tokių — tiesa, gana ilgų — ieškojimų keliu, kad „šakutė“ pažymi skaitmenį 1, toliau žengiame greičiau ir labiau užtikrintai. Iš atimties veiksmo *III* ir *IV* eilutėse matome, kad „puodelis“ pažymi arba 6, arba 8. Tačiau 8 tenka atmesti, nes priešingu atveju gautume, kad „taurelė“ turi pažymėti 4, o mes žinome, kad skaitmuo 4 pažymėtas „peiliu“. Taigi, „puodelis“ pažymi skaitmenį 6, o „taurelė“ — skaitmenį 3.

Koks gi skaičius *I* eilutėje pažymėtas „ąsotėliu“? Tai lengva sužinoti, nes mes žinome sandaugą (*III* eilutė, 624) ir vieną daugiklį (*II* eilutė, 12). Padalinę 624 iš 12, gauname 52. Vadinasi, „ąsotėlis“ pažymi skaitmenį 5.

„Lėkštės“ reikšmė nustatoma paprastai: *VII* eilutėje „šakutė“, sudėta su „puodeliu“, ir „taurelė“, sudėta su „peiliu“, duoda tą patį — „lėkštę“, t. y. „lėkštė“ pažymi skaičių, lygų $1 + 6 = 3 + 4 = 7$.

Taip mes nesudėtingais aritmetiniais skaičiavimais įspėjome ieroglifinį užrašą, sudarytą iš stalo servizo daiktų:

„ąsotis“ pažymi	5,		„puodelis“	—	6,
„šaukštas“	—	2,	„taurelė“	—	3,
„šakutė“	—	1.	„lėkštė“	—	7.
„peilis“	—	4,			

O visa aritmetinių veiksmų eilė, pavaizduota šituo originaliu servizu, įgyja tokią prasmę:

$$
\begin{array}{r}
\times \begin{array}{r} 52 \\ 12 \end{array} \\
\hline
- \begin{array}{r} 624 \\ 312 \end{array} \\
\hline
+ \begin{array}{r} 312 \\ 462 \end{array} \\
\hline
- \begin{array}{r} 774 \\ 712 \end{array} \\
\hline
62
\end{array}
$$

ARITMETINIAI REBUSAI

Aritmetiniais rebusais aš vadinu įdomų mokinių žaidimą, kurio esmė — atspėti sugalvotą žodį sprendžiant uždavinį, panašų į mūsų spręstą praeitame straipsnyje. Užmenantis sugalvoja žodį, susidedantį iš 10 nepasikartojančių raidžių, — pavyzdžiui, *„buhalteris"*, *„buldozeris"*, *„centrifuga"*. Laikydamas sugalvoto žodžio raides skaitmenimis, užmenantis šiomis raidėmis pavaizduoja kokį nors dalybos veiksmą. Jeigu sugalvotas žodis *„reklamuoti"*, tai galima paimti tokį dalybos pavyzdį:

r e k l a m u o t i
1 2 3 4 5 6 7 8 9 0
dalijamasis — *raketa*, 153 295
daliklis — *uola*, 7 845

```
153295 | 7845
 7845  |------
------ | 19
 74845
 70605
------
  4240
```

```
r a k e t a | uola
u o l a     |------
----------- | rt
  u l o l a
  u i m i a
-----------
    l e l i
```

Galima paimti ir kitus žodžius:

dalijamasis — *matuoti*, 6 597 890
daliklis — *tema*, 9 265

```
m a t u o t i | t e m a
m l o a a     |--------
-----------   | u r e
  r r e k t
    t e m a
  ---------
    r t u l i
    r o a k i
    ---------
      r e r i
```

Tam tikro dalybos pavyzdžio raidinis atvaizdas įteikiamas spėjančiajam, kuris iš to tarytum beprasmiško raidžių rinkinio turi įspėti sugalvotą žodį. Kaip ieškoti panašiais atvejais raidžių skaitmeninių reikšmių, skaitytojas jau žino: mes išaiškinome tai, kai sprendėme praeito straipsnio uždavinį. Šiuos aritmetinius rebusus galima sėkmingai išspręsti, jeigu tiktai pavyzdys pakankamai ilgas ir jame yra reikiamos medžiagos spėliojimams ir bandymams, o taip pat jeigu sprendėjas turi šiek tiek kantrybės. Bet jei parinkti žodžiai duoda pernelyg trumputį dalybos pavyzdį, pavyzdžiui:

kilometras
1234567890
dalijamasis — *retas,* 86 790
daliklis — *molis,* 54 320

```
retas | molis
molis |------
----- |   k
liots
```

tai įspėti labai sunku. Panašiais atvejais reikia paprašyti užmenantįjį pratęsti dalybą iki šimtųjų arba tūkstantųjų dalių, t. y. dalmenyje gauti dar bent du-tris dešimtainius ženklus. Žemiau duodame dalybos iki šimtųjų dalių pavyzdį:

tėveliukas
1234567890
dalijamasis — *taika,* 19 689
daliklis — *lėlė,* 5 252

```
taika  | lėlė
tluli  |-----
-----  | v, ue
vavvs
viuie
-----
 ėliis
 ėtssk
 -----
 eilė
```

Šiuo atveju, dalybą nutraukus ties sveikuoju dalmens skaičiumi (*v*), įspėti sugalvotą žodį vargu ar būtų įmanoma.

Žodžių, tinkančių panašių rebusų „raktams“, pasirinkimas ne toks jau mažas, kaip atrodo iš pirmo žvilgsnio; be anksčiau nurodytų, galima panaudoti žodžius:

respublika, *gražutėlis,*
kvepėjimas, *lygintuvas.*

Žemiau duodamas pavyzdys rodo, kaip toli šia kryptimi gali nuvesti išradingumas. Rebusas susideda iš dviejų dalių, kurios nuosekliai atskleidžia lozungą. Štai jos:

I

```
kaunietis | scena
nntca     |------
-----     | citcn
sukuie
sutnha
------
  ccuet
  ehesa
  -----
   iitti
   nntca
   -----
   sakils
   saiuka
   ------
     scks
```

II

```
seniunas | rasa
rasa     |------
----     | nuipž
pžpru
pemia
-----
 re aen
 rmsža
 -----
   nžaža
   npūaa
   -----
    esnms
    eūanm
    -----
      ais
```

Skaitytojas, kuris panorės išspręsti šitą dvigubą (ir gana nelengvą) rebusą, sužinos, kad

I — *su technika*

II — *nepražūsim*

Toliau siūlau skaitytojui savarankiškai išspręsti eilę rebusų:

Rebusas Nr. 1

```
akuotas | tema
tema    | dsnt
 etkta
 esedk
  nnnes
  eaono
   tutt
```

Rebusas Nr. 2

```
ananasas | genys
jogys    | ttsj
 jjvas
 jogys
  gyosas
  ggtgts
   gsavs
```

Rebusas Nr. 3

```
kerštas | erkė
šyšė    | ššer
 šnnt
 šyšė
  eėea
  erkė
   ryks
   rkas
    rės
```

Šitų rebusų sprendimus žr. atsakymuose.

KNYGŲ SPINTŲ DEŠIMTAINĖ SISTEMA

Dešimtainės skaičiavimo sistemos ypatybės puikiai panaudojamos net tokioje srityje, kur iš pirmo žvilgsnio ir laukti netenka, — būtent, bibliotekoje knygų laikymui.

Yra tokia knygų suskirstymo pagal numerius sistema, kurioje viena ir ta pati knyga bet kurioje bibliotekoje turi būti su vienodu numeriu. Tai yra vadinamoji „dešimtainė knygų klasifikacijos sistema“.

Šita sistema nepaprastai patogi ir visiškai nesudėtinga. Ji pagrįsta tuo, kad kiekviena mokslo šaka pažymima tam tikru skaičiumi taip, kad knygos numerio skaitmeninė sudėtis pati nurodo to dalyko vietą bendroje mokslo šakų sistemoje.

Pagal šitą tarptautinę dešimtainę klasifikaciją knygos pirmiausia suskirstomos į 10 stambių klasių, pažymimų skaitmenimis nuo 0 iki 9:

0. Bendro pobūdžio veikalai.
1. Filosofija.

2. Religija (pas mus — religijos istorija ir antireliginis skyrius).
3. Visuomeniniai mokslai. Teisė.
4. Filologija. Kalbos.
5. Fizikos-matematikos ir gamtos mokslai.
6. Taikomieji mokslai (medicina, technika, žemės ūkis ir pan.).
7. Menas.
8. Literatūra.
9. Istorija, geografija, biografijos.

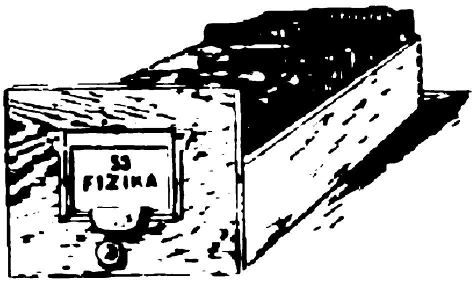
Šioje sistemoje knygos numerio pirmasis skaitmuo nurodo jos priklausomumą vienai ar kitai iš aukščiau išvardytųjų klasių: kiekvienos filosofinės knygos numeris prasideda 1, matematinės — 5, techninės — 6. Ir atvirkščiai, jeigu, pavyzdžiui, numeris prasideda 4, tai, net nematydami knygos, galime tvirtinti, kad priešais mus veikalas iš kalbos mokslo.

Toliau, kiekviena iš aukščiau minėtų 10 klasių suskirstyta į 10 pagrindinių skyrių, pažymėtų skaitmenimis; tie skaitmenys pažymint knygos numerį rašomi antroje vietoje. Pavyzdžiui, 5 klasė, kuri apima fizikos-matematikos ir gamtos mokslų knygas, yra suskirstyta į šiuos skyrius:

50. Fizikos-matematikos ir gamtos mokslų bendrieji veikalai.
51. Matematika.
52. Astronomija. Geodezija.
53. Fizika. Teorinė mechanika
54. Chemija. Mineralogija.
55. Geologija.
56. Paleontologija.
57. Biologija. Antropologija.
58. Botanika.
59. Zoologija.

Panašiu būdu suskirstytos į skyrius ir kitos klasės, pavyzdžiui, taikomųjų mokslų (6): medicinos skyrius pažymimas skaitmeniu 1, kuris rašomas po 6, t. y. skaičiumi 61, žemės ūkio — 63, namų ūkio — 64, prekybos ir susisiekimo — 65, cheminės pramonės ir technologijos — 66 ir pan. Lygiai taip pat 9 klasėje visos geografinės ir kelionių knygos priskirtos 91 skyriui ir pan.

Prie pirmų dviejų skaitmenų prijungus trečiąjį, dar tiksliau apibūdinamas knygos turinys, nurodant, kuriam duoto skyriaus poskyriui ji priklauso. Pavyzdžiui, matematikos skyriuje (51) skaitmuo 1, parašytas trečioje vietoje (511), parodo, kad knyga yra iš aritmetikos; 512 pažymi algebros knygas, 513 — geometrijos. Fizikos skyriuje (53) knygos apie elektrą pažymėtos šifru 537, apie optiką — 535, apie šilumą — 536.



Bibliotekos kortelinio katalogo, sudaryto pagal dešimtainę sistemą, dėžutė.

Dešimtaine sistema tvarkomoje bibliotekoje surasti reikalingą knygą yra visiškai paprasta. Jeigu jus domina geometrija, einate tiesiog prie spintų, kurių šifrai prasideda 5, surandate tą spintą, kurioje sudėtos knygos su šifru 51..., ir joje peržiūrite tiktai tas lentynas, kuriose sustatytos knygos su šifru 513, — čia surinktos visos bibliotekoje esančios knygos apie geometriją. Kokia didžiulė biblioteka bebūtų, niekada nebus tokios knygos, kurios nebūtų galima įterpti į šitą žymėjimo sistemą.

ĮVAIRIŲ TAUTŲ ARITMETINIAI ŽENKLAI IR PAVADINIMAI

Paprastai manoma, kad aritmetiniai ženklai yra tam tikru laipsniu internacionalūs, kad jie vienodi visose europinės kultūros tautose. Tai teisinga tiktai daugumos, bet ne visų ženklų atžvilgiu. Ženklus + ir —, ženklus × ir : vartoja vienoda prasme ir vokiečiai, ir prancūzai, ir anglai. Tačiau tašką kaip daugybos ženklą įvairios tautos vartoja ne visiškai tapatingai. Vieni rašo 7 . 8, kiti — 7 · 8, tašką pakeldami iki skaitmens aukščio vidurio. Tą patį galima pasakyti ir apie trupmenos ženklą, t. y. apie ženklą, kuris sveiką skaičių atskiria nuo dešimtainės trupmenos. Vieni rašo, kaip mes, 4,5; kiti — 4.5; treti — 4·5, tašką pakeldami aukščiau vidurio. Anglai ir amerikiečiai visiškai nerašo nulio prieš dešimtainę trupmeną, o Europos žemyne niekas taip nedaro. Amerikietiškoje knygoje vietoje mūsiškojo 0,725 galima rasti tokius užrašymus, kaip .725, arba ·725, arba net ,725.

Nevienodai pažymimas taip pat ir skaičių skaldymas į klases. Vienose šalyse klasės atskiriamos taškais (15.000.000), kitose — kableliais (15,000,000). Pas mus įsigalėjo protingas paprotys tarp klasių nerašyti jokio ženklo, o palikti tik tarpelį (15 000 000).

Pravartu pasekti, kaip keičiasi to paties skaičiaus pavadinimas pereinant iš vienos kalbos į kitą. Pavyzdžiui, skaičius 18 rusų kalba vadinamas „восемнадцать“ [1], t. y. pradžioje ištariami vienetai (8), o po to dešimtys (10). Tokia pat tvarka skaito šį skaičių vokietis: achtzehn, t. y. 8—10. Tačiau prancūzas ištaria kitaip: 10—8 (dix-huit). Vienas tyrinėtojas sudarė lentelę, iš kurios matome, kaip įvairiai vadinamas tas pats skaičius 18 įvairiose tautose:

lietuviškai	8 lieka (virš 10)
rusiškai	8 — 10
arméniškai	10 + 8
vokiškai	8 — 10
prancūziškai	10 — 8
graikiškai	8 + 10
lotyniškai	be 2 20
Naujosios Zelandijos kalba	11 + 7
vališkai	3 + 5 — 10
koriakiškai	3 — 5 virš 10

To paties skaičiaus 18 pavadinimas vienos Grenlandijos genties kalboje kurioziškas: „nuo kitos kojos 3“. Nors ir savotiškas, šitas pavadinimas paaiškinamas paprastai, skai-

[1] T. y. aštuoni ant dešimties.

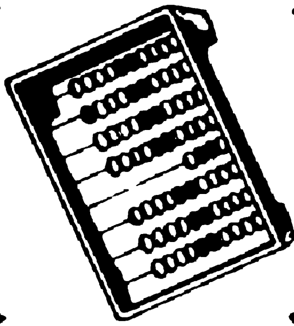
čiavimu rankų ir kojų pirštų pagalba. Atskleisime jo prasmę:

abiejų rankų pirštų skaičius	. .	10
vienos kojos „ „	. .	5
kitos kojos „ „	. . . .	3
	Iš viso .	18

Panašiai paaiškinamas ir karaibiškasis skaičiaus 18 pavadinimas: „visos mano rankos, 3, mano ranka“ (tai yra 10 + 3 + 5).

ARITMETINIS KURIOZAS

$$100 = \left\{ \begin{array}{l} 1+2+3+4+5+6+7+8\times 9 \\ 1+2\times 3+4\times 5-6+7+8\times 9 \\ 1+2\times 3+4+5+67+8+9 \\ 1\times 2+34+56+7-8+9 \\ 12+3-4+5+67+8+9 \\ 12-3-4+5-6+7+89 \\ 123+4-5+67-89 \\ 123+45-67+8-9 \\ 123-45-67+89 \\ (1+2-3-4)\,(5-6-7-8-9) \end{array} \right.$$



ANTRASIS SKYRIUS

SENOJO ABAKO PALIKUONIS

ČECHOVIŠKAS GALVOSŪKIS

Priminsime tą savotiškai įžymų aritmetinį uždavinį, kuris kažkada taip suglumino Čechovo apsakymo „Repetitorius“ herojų septintoką Ziberovą.

„Pirklys pirko 138 arš.[1] juodos ir mėlynos gelumbės už 540 rub. Kiek aršinų vienos ir kitos medžiagos jis pirko, jeigu mėlyna kainavo po 5 rub., o juoda po 3 rub. už aršiną?“

Čechovas su taikliu jumoru aprašo, kaip bejėgiškai prie šio uždavinio triūsė ir septintokas-repetitorius, ir jo mokinys, dvylikametis Petia, kol neatėjo jiems į pagalbą Petios tėvas, Udodovas:

„Petia pakartoja uždavinį ir tuoj pat, netaręs nė žodžio, pradeda 540 dalyti iš 138.

— Kodėl gi jūs dalijate? Palaukite! Beje, taip... tęskite. Gavote liekaną? Čia negali būti liekanos. Duokite, aš padalysiu!

---

[1] Aršinas — rusų ilgio matas, lygus 0,711 m.

Ziberovas (repetitorius. — *J. P.*) dalija, gauna 3 su liekana ir greitai nutrina.

„Keista... — galvoja jis, šiaušdamas plaukus ir raudonuodamas. — Kaipgi jis sprendžiamas? Hm!.. Šis uždavinys iš neapibrėžtinių lygčių, o visiškai ne aritmetinis“.

Mokytojas pasižiūri į atsakymus ir mato 75 ir 63.

„Hm!.. keista... Sudėti 5 ir 3, o po to 540 padalyti iš 8? Bene taip? Ne, ne tai“.

\— Spręskite gi! — sako jis Petiai.

— Na, ko galvoji? Juk uždavinys vieni niekai! — sako Petiai Udodovas. — Koksai kvailiukas tu, brolyti! Išspręskite jau jūs jam, Jegorai Aleksejičiau.

Jegoras Aleksejičius (repetitorius. — *J. P.*) paima į rankas grifelį ir pradeda spręsti. Jis mikčioja, raudonuoja, blykšta.

— Šis uždavinys, tiesą sakant, yra algebrinis, — kalba jis. — Su iksu ir ygreku jį galima išspręsti. Beje, spręsti galima ir taip. Štai aš padalijau... suprantate? O dabar štai reikia atimti... suprantate? Arba štai kas... Išspręskite man šį uždavinį rytdienai... Pagalvokite...

Petia piktai šypsosi. Udodovas taip pat šypsosi. Jie abu supranta mokytojo sumišimą. VII klasės mokinys dar labiau suglumsta, pakyla ir vaikšto iš kampo į kampą.

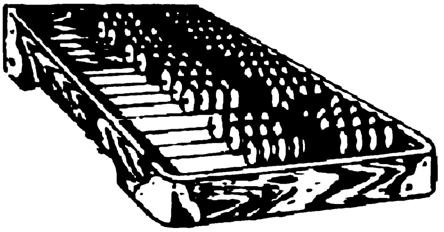
— Ir be algebros galima išspręsti, — sako Udodovas, tiesdamas ranką prie skaitytuvų ir atsidusdamas. — Štai, malonėkite žvilgterėti...

Jis taukši skaitytuvais ir gauna 75 ir 63, — tai, ką ir reikėjo gauti.

— Štai... mūsiškai, nemoksliškai“.

Istorija su uždaviniu, verčianti mus juoktis iš nelaimingo repetitoriaus suglumimo, iškelia mums pati tris naujus uždavinius. Būtent:

1. Kaip ketino repetitorius išspręsti uždavinį algebriškai?



Rusų kontoriniai skaitytuvai.

2. Kaip turėjo jį spręsti Petia?

3. Kaip išsprendė jį Petios tėvas skaitytuvais „nemoksliškai"?

Į pirmuosius du klausimus, tikriausia, be vargo atsakys jei ne visi, tai gana daugelis mūsų knygutės skaitytojų. Trečiasis klausimas ne toks paprastas. Tačiau panagrinėkime juos iš eilės.

1. Septintokas-repetitorius buvo įsitikinęs, kad uždavinys yra „tiesą sakant, algebrinis" ir rengėsi jį spręsti „su iksu ir ygreku". Ir jis, reikia manyti, būtų lengvai susidorojęs su uždaviniu, jei būtų griebęsis lygčių (tiktai ne neapibrėžtinių, kaip jam atrodė) sistemos. Sudaryti dvi lygtis su dviem nežinomaisiais šiam uždaviniui visai nesunku; štai jos:

$$x + y = 138; \qquad 5x + 3y = 540,$$

kur x — mėlynos, o y — juodos gelumbės aršinų skaičius.

2. Tačiau uždavinys lengvai išsprendžiamas ir aritmetiškai. Jeigu jums reikėtų jį išspręsti, jūs pradėtumėte nuo prielaidos, kad visa pirkta gelumbė buvo mėlyna, tuomet už 138 aršinų mėlynos gelumbės partiją reikėtų sumokėti $5 \times 138 = 690$ rub., t. y. $690 - 540 = 150$ rub. daugiau, negu sumokėta iš tikrųjų[1]. 150 rublių skirtumas rodo, kad visoje pirktos gelumbės partijoje buvo pigesnės, juodos gelumbės, kuri kainavo po 3 rub. už aršiną. Pigios gelumbės buvo tiek, kad iš dviejų rublių skirtumo kiekvienam aršinui susidarė 150 rub.: aišku, juodos gelumbės aršinų skaičius bus nustatytas, padalijus 150 iš 2. Gauname atsakymą — 75; atėmę iš bendro 138 aršinų skaičiaus 75 aršinus, sužinome, kiek buvo mėlynos gelumbės: $138 - 75 = 63$. Taip Petia ir turėjo spręsti uždavinį.

[1] Galima pradėti nuo prielaidos, kad buvo pirkta tiktai juoda gelumbė. Pabandykite tai atlikti patys. — *Red.*

3. Pagaliau trečiasis klausimas: kaip išsprendė uždavinį Udodovas-vyresnysis?

Apsakyme apie tai užsiminta labai trumpai: „Jis taukši skaitytuvais ir gauna 75 ir 63, — tai, ką ir reikėjo gauti".

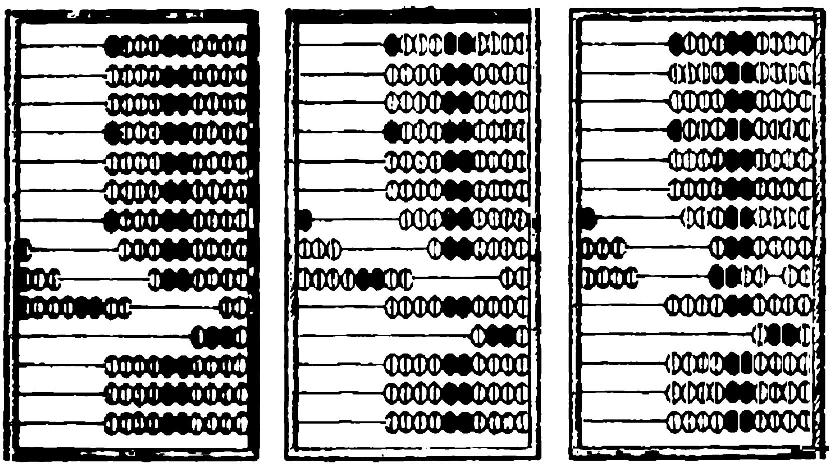
Tačiau kaip ten buvo „taukšima skaitytuvais"?

Kokiu būdu uždavinys sprendžiamas skaitytuvų pagalba?

Atsakymas toks: nelemtasis uždavinys skaitytuvais sprendžiamas tuo pačiu metodu, kaip ir popieriuje, — tais pačiais aritmetiniais veiksmais. Tačiau jų atlikimas supaprastėja, kai mokamai panaudojami rusiškųjų skaitytuvų pranašumai. Matyt, „atsistatydinęs gubernijos sekretorius" Udodovas gerai mokėjo skaičiuoti skaitytuvais, jeigu jų skridinėliai greitai, be algebros pagalbos, davė jam tai, ko septintokas-repetitorius ketino ieškoti „su iksu ir ygreku". Panagrinėsime, kokius veiksmus turėjo atlikti skaitytuvais Petios tėvas.

Mes jau žinome, kad pirmiausia jam reikėjo 138 padauginti iš 5. Tam jis, pagal skaičiavimo skaitytuvais taisykles, padaugino pradžioje 138 iš 10, t. y. tiesiog perkėlė 138 viena eilute aukščiau, o paskui padalijo šį skaičių pusiau taip pat skaitytuvais. Dalyba pradedama iš apačios: atmetama pusė skridinėlių, atidėtų ant kiekvieno virbo; jeigu ant to virbo skridinėlių skaičius nelyginis, tai išsisukama, šito virbo vieną skridinėlį „suskaldant" į dešimtį žemesniojo virbo skridinėlių.

Pavyzdžiui, mūsų atveju skaičius 1380 pusiau dalijamas taip: ant žemutinio virbo, kur atidėti 8 skridinėliai, atmetami 4 skridinėliai (4 dešimtys), ant vidurinio virbo iš trijų skridinėlių atmetamas vienas, o iš likusių dviejų vienas mintinai pakeičiamas dešimčia žemesniųjų ir padalijamas pusiau, pridedant prie žemutinio virbo skridinėlių 5 dešimtis; ant aukštutinio virbo 1 skridinėlis taip pat suskaldomas, pridedant 5 skridinėlius (šimtus) prie vidurinio virbo skridinėlių. Baigus dalybą, ant aukštutinio virbo visai nelieka skridinėlių; ant vidurinio $1 + 5 = 6$ šimtai, ant



138 1380 80 : 2

Kontoriniais skaitytuvais 138 iš 5 dauginama šitokiu būdu: iš pradžių ant skaitytuvų atidedama 138; paskui, atidėtus skridinėlius tiesiog perkeliant viena eilute aukščiau, 138 padauginami iš 10; po to jie padalijami iš 2 (dešimtys piešinyje jau padalytos), ir gaunamas 138×5 rezultatas.

žemutinio $4 + 5 = 9$ dešimtys. Iš viso 690 vienetų. Visa tai atliekama greitai, automatiškai.

Toliau Udodovui-vyresniajam reikėjo iš 690 atimti 540. Kaip tai atlikti skaitytuvais, visiems žinoma.

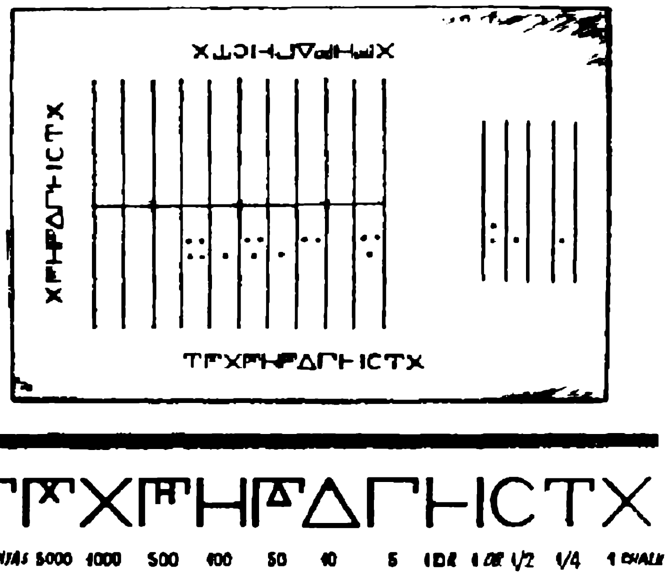
Pagaliau gautą skirtumą, 150, beliko padalyti pusiau: Udodovas iš 5 skridinėlių (dešimčių) atmetė 3, atiduodamas 5 vienetus žemutinei skridinėlių eilei; po to iš 1 skridinėlio, esančio ant šimtų virbo, 5 dešimtis atidavė žemutinei eilei: susidarė 7 dešimtys ir 5 vienetai, t. y. 75.

Aišku, visi šie paprasti veiksmai skaitytuvais atliekami kur kas greičiau, negu čia aprašyta.

SKAITYTUVAI

Yra daug naudingų daiktų, kurių mes nevertiname vien dėl to, kad jie, nuolat būdami mums po ranka, tapo perdaug kasdieniniu namų apyvokos daiktu. Tokių nepakankamai vertinamų daiktų tarpe yra ir mūsų kontoriniai skaitytuvai — rusų liaudies skaičiavimo mašina, kuri išsivystė iš garsiojo mūsų tolimų protėvių abako, arba „skaičiavimo lentos“.

Senovės tautos — egiptiečiai, graikai, romėnai — skaičiavimams naudojo specialų prietaisą — abaką. Tai buvo



„Salaminiečių lenta“ — senovės graikų abakas marmurinėje 150 × 75 *cm* dydžio lentoje, atrastoje 1948 metais Salamino saloje. Kairėje esančiais stulpeliais buvo skaičiuojamos drachmos ir talentai; dešinėje — drachmų dalys: obolai ir chalkai. Ant abako atidėta: 4873 drachmos 2 obolai 5 chalkai.

lenta (stalas), suliniuota į ruoželius, kuriais buvo stumdomos specialios šaškės, atitikusios mūsų skaitytuvų skridinėlius. Toks buvo graikų abakas. Romėnų abakas buvo sudarytas iš varinės lentos su grioveliais (prapiovomis), kuriuose buvo stumdomos sagutės.

Abakui giminingas yra peruviečių „kvipos“ — eilė diržiukų arba virvelių su užmegztais mazgais. Šis skaičiavimo prietaisas buvo ypač paplitęs pirmųjų Pietų Amerikos gyventojų tarpe. Tačiau, be abejo, jis buvo naudojamas taip pat ir Europoje (žr. toliau: „Senovės atgarsiai“).

Senovės graikų mokesčių rinkėjas, skaičiuojantis abaku (iš senovinės vazos Neapolyje). Abakas neturi stulpelių, ir akmenėliai dėstomi tiesiog ties raidėmis, pažyminčiomis skyrius: piešinyje atidėta 1231 drachma 4 obolai.

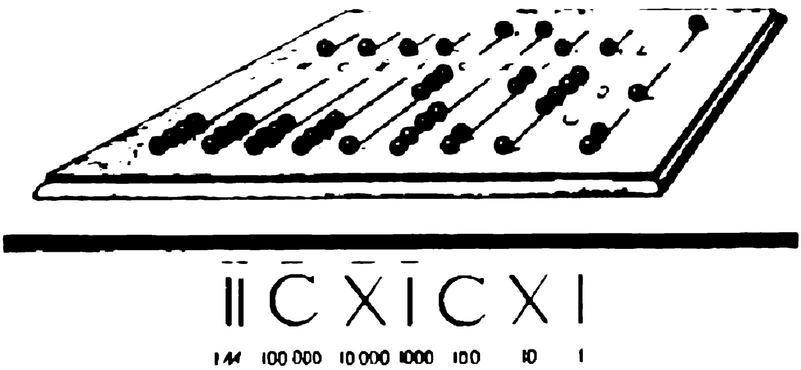
Viduriniais amžiais, iki pat XVI amžiaus, panašūs prietaisai buvo plačiai paplitę Europoje. Tačiau dabar pakeistos formos abakas — skaitytuvai — paliko, berods, tiktai pas mus, o taip pat Azijos Rytuose — Kinijoje (septynių skridinėlių skaitytuvai — „suan-pan“ [1]) ir Japonijoje (taip pat septynių skridinėlių skaitytuvai — „soroban“). Ten kiekvienas raštingas žmogus moka tokiais skaitytuvais atlikti keturis aritmetinius veiksmus.

Tuo tarpu Vakarai skaitytuvų beveik visai nežino — jų nerasite nė vienoje Europos krautuvėje. Tiktai pradinėse mokyklose yra didžiuliai skaitytuvai — vaizdinė klasės priemonė numeracijai mokyti.

Japonai labai vertina savo skaitytuvus. Štai kaip atsiliepia apie sorobaną vienas japonų mokslininkas: „Sorobanas, nežiūrint jo senoviškumo, skaičiavimo lengvumu, įtaisymo paprastumu ir pigumu pralenkia visus šiuolaikinius skaičiavimo prietaisus“.

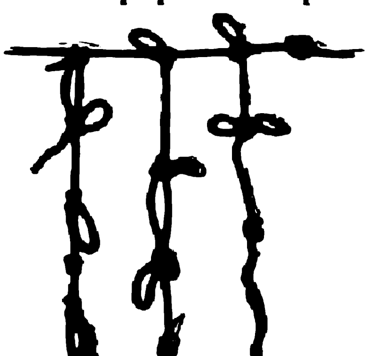
Mes taip pat turime teisę didžiuotis mūsų kontoriniais skaitytuvais, nes jie, nors įtaisyti be galo paprastai, pagal pasiekiamus rezultatus gali konkuruoti kai kuriais atžvil-

[1] Suan-pan esti įvairiausio dydžio, iki pat miniatiūrinių (aš turiu kinišką suan-pan — 17 *mm* ilgio ir 8 *mm* pločio breloką). Naudojami ir šešių skridinėlių skaitytuvai. 5 skridinėliai iš vienos ilginuko pusės, vienas — iš kitos. (Mano turimuose tokiuose skaitytuvuose yra 21 skridinėlių eilė.)

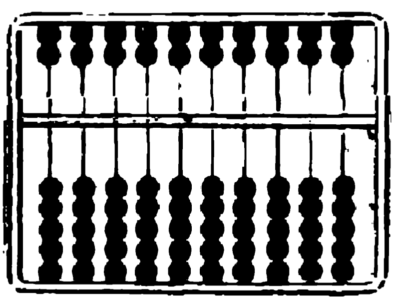


Romėnų abakas buvo bronzinė lenta su išpiovomis, kuriomis buvo stumdomos apskritos bronzinės sagutės. Apatinės eilutės sagutės (po keturias kiekvienoje išpiovoje), pastumtos į vidurį, pažymėdavo savo skyriaus vienetus; pastumtos viršutinės eilutės sagutės (po vieną kiekvienoje išpiovoje) pažymėdavo penketus; dviejų kraštinių išpiovų, esančių dešinėje pusėje, sagutėmis buvo skaičiuojamos trupmenos: kairiojoje išpiovoje buvo atidedama $^1/_{12}$; dešiniojoje — $^1/_{24}$; $^1/_{48}$; $^1/_{72}$. Ant abako atidėtas skaičius 852 $^4/_{12}$ $^1/_{24}$.

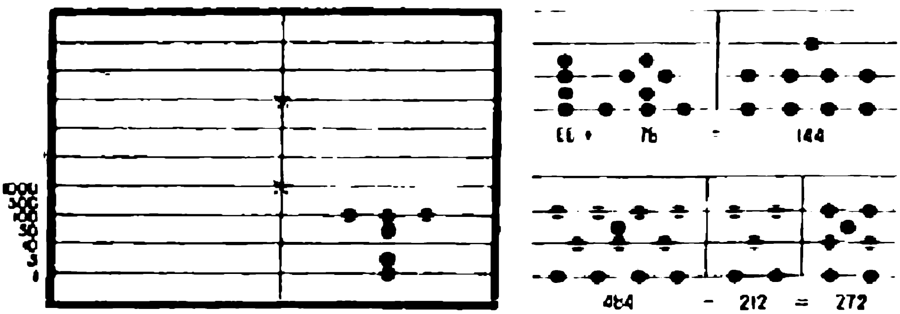
giais net su sudėtingomis, brangiomis skaičiavimo mašinomis. Šis paprastutis prietaisas gerose rankose kai kada daro tiesiog stebuklus. Vienas specialistas, kuris iki revoliucijos vadovavo stambiai rusų firmai, pardavinėjusiai



Peruviečių skaičiavimo prietaisas — „kvipos". Mūsų dienų paprotys užmegzti ant nosinės mazgą, norint ką nors atminti, yra panašių virvelinių prietaisų naudojimo atgarsis.

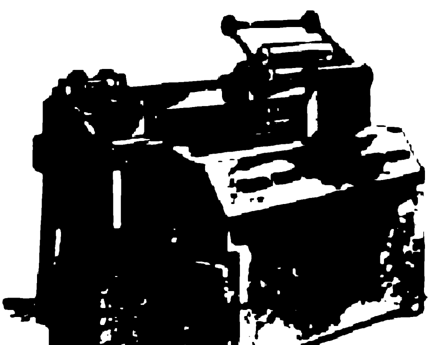


Septynių skridinėlių skaitytuvai. Kinijoje jie vadinami „suan-pan", Japonijoje — „soroban".



Rusų kontorinių skaitytuvų pirmtakas — senovės rusų abakas „skaičiavimas kauliukais“, žinomas iš XVI—XVII amžių rankraščių. Ant lentos arba ant stalo kreida buvo išbraižomas 6—9 horizontalinių ir keleto vertikalinių linijų tinklelis. Skaičiavimai buvo atliekami slyvų kauliukų arba varinių žetonų — „peniazių“ — pagalba; jie buvo išdėstomi ant horizontalinių linijų ir tarpuose tarp jų; dabar ant abako atidėtas skaičius 356. Šone parodyta „skaičiavimo kauliukais“ sudėtis (viršuje) ir atimtis (apačioje).

skaičiavimo mašinas, man papasakojo, kad jam ne kartą teko stebinti rusiškais skaitytuvais svetimšalius, kurie į jo kontorą atveždavo sudėtingų skaičiavimo mechanizmų pavyzdžius. Jis rengdavo dviejų skaičiuotojų varžybas: vienas iš jų skaičiuodavo brangia užsienine „adicine“ mašina (t. y. sudėties mašina), o kitas naudodavo paprastus skaitytuvus. Ir būdavo, kad pastarasis — tiesa, didelis savo darbo meistras — skaičiavimų greitumu ir tikslumu pralenkdavo užsieninės keistenybės savininką. Būdavo ir taip, kad užsienietis, apstulbintas skaičiavimų skaitytuvais greitumo, iš karto pasiduodavo ir kišdavo savo mašiną į lagaminą, nebesitikėdamas parduoti pas mus nė vieno egzemplioriaus.



Dabartinis tarybinis skaičiuojąs ir užrašąs automatas — tabuliatorius. Jis pats suskaičiuoja ir užrašo iki 45 000 operacijų per valandą. (Viena iš paskutinių tarybinių skaičiavimo mašinų „BESM“ atlieka 8000 operacijų per sekundę. — *Vert. red.*)

— Kuriems galams jums brangios skaičiavimo mašinos, jeigu jūs savo pigiais skaitytuvais taip puikiai skaičiuojate! — dažnai sakydavo užsienio firmų atstovai.

Tiesa, rusiškaisiais skaitytuvais negalima atlikti visų tų veiksmų, kuriuos atlieka mašina. Šiuolaikinės skaičiavimo mašinos, žinoma, toli pralenkė mūsų skaitytuvus. Tačiau daugeliu atvejų — pavyzdžiui, sudedant ir atimant — skaitytuvai gali lenktyniauti su sudėtingais prietaisais. Beje, įgudęs skaičiuotojas, žinantis daugybos ir dalybos atlikimo skaitytuvais būdus, žymiai pagreitina ir šių skaičiavimo veiksmų atlikimą.

Su kai kuriais skaičiavimo būdais mes ir susipažinsime.

DAUGYBA SKAITYTUVAIS

Štai keletas būdų, kuriais pasinaudodamas kiekvienas, mokantis skaitytuvais greitai s u d ė t i, gali greitai atlikti praktikoje pasitaikančius d a u g y b o s veiksmus.

Dauginimas iš 2 arba 3 pakeičiamas dviguba arba triguba sudėtimi.

Dauginant iš 4, iš pradžių padauginama iš 2, ir gautas rezultatas sudedamas pats su savimi.

Skaitytuvais skaičius iš 5 dauginamas taip: visas skaičius perkeliamas vienu virbu aukštyn, t. y. padauginamas iš 10, o po to šis skaičius dalijamas pusiau (kaip padalyti skaitytuvais skaičių iš dviejų, jau paaiškinta aukščiau).

Užuot dauginus iš 6, dauginama iš 5, ir pridedamas dauginamasis.

Užuot dauginus iš 7, dauginama iš 10, ir atimamas dauginamasis 3 kartus.

Dauginimas iš 8 pakeičiamas dauginimu iš (10 — 2).

Lygiai taip pat dauginama iš 9: pakeičiama dauginimu iš (10 — 1).

Dauginant iš 10, kaip jau buvo sakyta, visas skaičius perkeliamas vienu virbu aukštyn.

Skaitytojas, tikriausiai, jau pats supras, ką reikia daryti dauginant iš skaičių, didesnių kaip 10, ir kokie pakeitimai tokiais atvejais yra patogiausi. Daugiklį 11, aišku, reikia pakeisti (10 + 1). Daugiklis 12 pakeičiamas (10 + 2) arba, praktiškai, (2 + 10), t. y. iš pradžių atidedamas padvigubintas skaičius, o po to pridedamas dešimteriopas. Daugiklis 13 pakeičiamas (10 + 3) ir t. t.

Dabar peržiūrėsime keletą pirmosios šimtinės daugiklių ypatingų atvejų:

$20 = 10 \times 2$	$32 = 22 + 10$
$22 = 11 \times 2$	$42 = 22 + 20$
$25 = (100:2) : 2$	$43 = 33 + 10$
$26 = 25 + 1$	$45 = 50 - 5$
$27 = 30 - 3$	$63 = 33 + 30$ ir t. t.

Lengva pastebėti, tarp kitko, kad skaitytuvais labai patogu dauginti iš tokių skaičių, kaip 22, 33, 44, 55 ir pan. Todėl reikia stengtis daugiklį suskaldyti taip, kad būtų gauti panašūs skaičiai su vienodais skaitmenimis.

Panašūs būdai taikomi ir dauginant iš skaičių, didesnių kaip 100. Jeigu panašūs dirbtiniai būdai vargina, mes visada, žinoma, galime dauginti skaitytuvais pagal bendrą taisyklę, daugindami kiekvieną daugiklio skaitmenį ir užsirašydami dalines sandaugas, — tai vis dėlto šiek tiek sutaupo laiko.

DALYBA SKAITYTUVAIS

Kontoriniais skaitytuvais dalyti yra žymiai sunkiau, negu dauginti; tam reikia įsidėmėti ištisą eilę ypatingų būdų, kartais gan painių. Čia nurodysiu tik, kaip pavyzdį, patogius būdus dalyti skaitytuvais iš pirmosios dešimties skaičių (išskyrus skaičių 7, iš kurio dalyti yra perdaug sudėtinga).

Kaip dalyti iš dviejų, mes jau žinome (25 psl.) — labai paprastas būdas.

Kur kas sudėtingiau dalyti iš 3: čia dalyba pakeičiama dauginimu iš begalinės periodinės trupmenos 0,333... (žinoma, kad 0,333... = $^1/_3$). Skaitytuvais dauginti iš 3 mes mokame; sumažinti 10 kartų taip pat nesudėtinga: reikia tik dalijamąjį perkelti vienu virbu žemyn. Šiek tiek pasipraktikavus, šis dalybos iš 3 būdas, iš pirmo pažiūrėjimo ilgokas, pasirodo esąs gana patogus praktikoje.

Dalyba iš 4, aišku, pakeičiama dviguba dalyba iš 2.

Dar paprastesnė dalyba iš 5: ji pakeičiama dalyba iš 10 ir rezultato padvigubinimu.

Iš 6 padalijama per du kartus: iš pradžių dalijama iš 2, po to gautas rezultatas dalijamas iš 3.

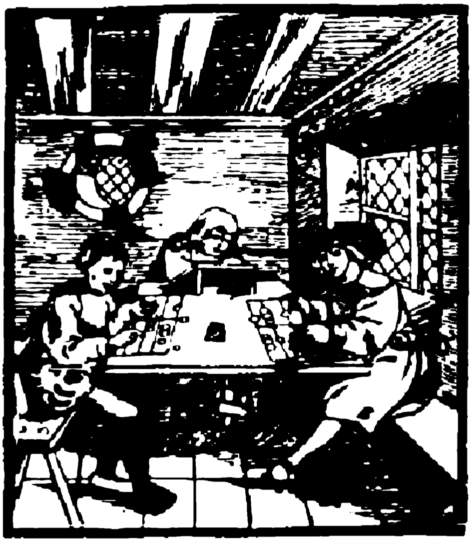
Iš 8 padalijama per tris kartus: pradžioje iš 2, po to gautas rezultatas vėl iš 2, o paskui dar kartą iš 2.

Labai įdomus dalybos iš 9 būdas. Jis pagrįstas tuo, kad $^1/_9 = 0,1111...$ Iš čia aišku, kad, užuot dalijus iš 9, galima nuosekliai sudėti 0,1 dalijamojo + 0,01 jo ir t. t.[1] Paprasčiausia, kaip matome, dalyti iš 2, 10 ir 5, o taip pat iš kartotinių jiems skaičių, kaip 4, 8, 16, 20, 25, 40, 50, 75, 80, 100. Šitie dalybos atvejai yra nesunkūs net ir mažai prityrusiam skaičiuotojui.

SENOVĖS ATGARSIAI

Su tolimais mūsų kontorinių skaitytuvų protėviais yra susijusios kai kurios senovės liekanos kalboje ir papročiuose. Pavyzdžiui, kai mes ant nosinės užrišame mazgelį „kad neužmirštume", visai ir neįtariame, ką darome iš tikrųjų. Mes kartojame tą patį, ką mūsų protėviai kažkada darė su didele prasme, „užsirašydami" tokiu būdu skaičiavimo ant virvučių rezultatą. Virvutė su mazgais buvo kažkada skaičiavimo prietaisas, pagal principą analogiškas mūsų skaitytuvams ir, be abejo, susijęs su jais kilmės bendrumu.

[1] Šis būdas naudingas ir dalijant iš 9 mintinai.



Vokiečių pirkliai skaičiuoja ant skaičiavimo lentų. (1518 metų graviūra.)

Tai — „virvelinis abakas". Ant virvutės užmegztas viengubas mazgas reiškė 10, dvigubas — 100, trigubas — 1 000 ir t. t.

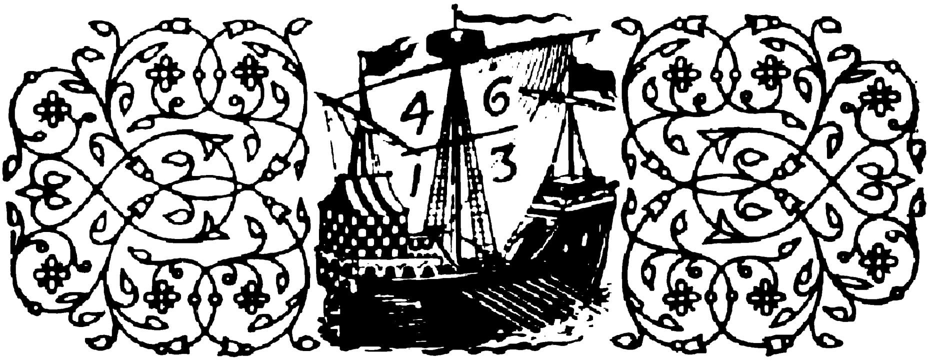
Su abaku susiję yra ir tokie šiandien plačiai paplitę žodžiai, kaip „bankas" ir „čekis". „Bank" vokiškai reiškia „s u o l a s". Kas gi bendro tarp finansinės įstaigos — „banko" šių dienų žodžio prasme — ir suolo? Pasirodo, čia toli gražu ne paprastas pavadinimų sutapimas. S u o l o formos a b a k a s XV—XVI amžiais buvo plačiai paplitęs Vokietijos pirklių tarpe; kiekviena pinigų keičiamoji arba bankinė kontora skyrėsi nuo kitų pirmiausia tuo, kad joje buvo „skaičiavimo suolas", — natūralu, kad suolas tapo banko sinonimu.

Mažiau susijęs su abaku žodis „čekis". Jis yra kilęs iš anglų kalbos veiksmažodžio „čeker" (checker) — grafuoti; „čekered" (grafuotas) buvo vadinama odinė staltiesėlė, išgrafuota pagal abako formą. Tokias staltiesėles XVI—XVII amžiais anglų komersantai nešiojosi suvyniotas ir, kai reikėdavo skaičiuoti, ištiesdavo ant stalo. Skaičiavimo blankai buvo grafuojami pagal šių suvyniojamų abakų pavyzdį, ir nenuostabu, kad jie gavo sutrumpintą šių skaičiavimo prietaisų pavadinimą.

Įdomu, iš kur kilo rusiškas išsireiškimas „palikti su pupomis" („остаться на бобах"). Jis atsirado tuomet, kai visi piniginiai skaičiavimai buvo atliekami ant abako, skaičiavimo stalo arba suolo pupomis, kurios atstodavo mūsų skaitytuvų skridinėlius. Kampanelos[1] knygoje „Saulės miestas“ (1602) skaitome: „Vienas skaičiuoja akmenėliais, kitas — pupomis“. Žmogui, pralošusiam visus savo pinigus, palikdavo vien pupos, kurios parodydavo jo praloštą sumą. Iš čia ir atitinkamas išsireiškimas kalboje.

Skaičiavimo žetonas — „peniazė“ — su skaičiavimo lentos — abako — atvaizdu; pagamintas vokiečių 1691 metais.

[1] Tomazo Kampanela (1568—1639) — italų mąstytojas, vienas iš ankstyvųjų utopinio komunizmo atstovų.



TREČIASIS SKYRIUS

TRUPUTIS ISTORIJOS

„SUNKUS DALYKAS — DALYBA“

Įžiebdami įprastu judesiu degtuką, mes kai kada dar pagalvojame — kiek darbo reikėjo įdėti net ir netolimiems mūsų protėviams, norint gauti ugnies.

Bet maža kas įtaria, kad dabartiniai aritmetinių veiksmų atlikimo būdai taip pat ne visada buvo tokie paprasti ir patogūs, taip tiesiai ir greitai davė rezultatą.

Mūsų protėviai naudojo kur kas griozdiškesnius ir lėtesnius būdus. Ir jeigu XX amžiaus mokinukas galėtų persikelti per tris-keturis amžius atgal, jis mūsų protėvius nustebintų savo aritmetinių skaičiavimų greitumu ir tikslumu. Gandai apie jį pasklistų po aplinkines mokyklas ir vienuolynus, užtemdydami tos epochos geriausių skaičiuotojų šlovę, ir iš visų pusių važiuotų mokytis pas naują, didelį skaičiavimo meistrą.

Senovėje ypatingai sudėtingi ir sunkūs buvo daugybos ir dalybos veiksmai — ypač dalyba. Senovėje būdavo sakoma: „Daugyba — mano kančia, o su dalyba — bėda“. Tada dar nebuvo, kaip dabar, vieno praktikos paruošto būdo kiekvienam veiksmui. Priešingai, vienu metu buvo naudojama vos ne tuzinas skirtingų daugybos ir dalybos būdų. Tie būdai buvo vienas už kitą painesni, juos tvirtai atminti vidutinių gabumų žmogui buvo neįmanoma. Kiekvienas skaičiavimo mokytojas laikėsi savo mėgiamo metodo, kiekvienas „dalybos magistras" (buvo tokių specialistų) gyrė metodą, kuriuo jis pats atlikdavo tą veiksmą. Ir visi tie daugybos būdai — „šachmatais, arba vargonėliu", „užlenkimu", „dalimis, arba atplėšiant", „kryžiuku", „grotelėmis", „užpakaliu į priekį", „rombu", „trikampiu", „kubuku", arba „taure", „deimantu" ir kt., o taip pat visi dalybos būdai, kurie turėjo ne mažiau įmantrius pavadinimus, varžėsi vienas su kitu savo griozdiškumu ir sudėtingumu. Juos išmokti buvo labai sunku ir įmanoma tiktai po ilgos praktikos. Net buvo manoma, kad išmokti greitos ir teisingos daugiaženklių skaičių daugybos ir dalybos meno gali tiktai tas, kas apdovanotas įgimtu talentu, ypatingais gabumais; eiliniams žmonėms ši aukšta išmintis nepasiekiama. „Sunkus dalykas — dalyba" (dura cosa e la partita), — sakė senovinė italų patarlė. Ji ir iš tikrųjų buvo sunki, jeigu atminsime tuos varginančius metodus, kuriais tada šis veiksmas buvo atliekamas. Nesvarbu, kad tie metodai kartais turėjo gana žaismingus pavadinimus; už linksmo pavadinimo slėpėsi ilgiausia painių manipuliacijų eilė. Pavyzdžiui, XVI amžiuje trumpiausiu ir patogiausiu metodu buvo laikoma dalyba „laiveliu arba galera".

Įžymus to meto italų matematikas — Nikola Tartalja (Tartaglia) (XVI amž.) savo plačiame aritmetikos vadovėlyje štai ką rašė apie minėtąjį metodą: „Antrasis dalybos būdas Venecijoje[1] vadinamas l a i v e l i u arba g a l e r a,

---

[1] Venecija ir kai kurios kitos Italijos valstybės XIV—XVI amžiais vedė plačią jūrų prekybą, ir todėl, ryšium su komercinėmis reikmėmis, tose šalyse skaičiavimo būdai buvo paruošti anksčiau, negu kitose. Geriausi aritmetikos darbai išėjo Venecijoje. Daugelis italų komercinės aritmetikos terminų išliko iki šių dienų.

nes šiuo būdu dalijant kai kuriuos skaičius gaunama figūra, panaši į laivelį, o dalijant kitus — panaši į galerą, kuri iš tikrųjų gražiai atrodo; kartais galera išeina gražiai išdailinta ir su visais priedais — skaičiai išdėstomi taip, kad iš tiesų pasirodo galeros forma su abiem galais, stiebu, burėmis ir irklais".

Skaityti visa tai labai linksma: taip ir norisi aritmetinės galeros burėmis leistis per skaičių jūrą. Bet, nors senovės matematikas ir rekomenduoja šį būdą kaip „dailiausią, lengviausią, tikriausią, labiausiai vartotiną ir bendriausią iš esančių, tinkamą dalyti visiems galimiems skaičiams", aš nesiryžtu čia jo išdėstyti, nes bijau, kad net kantrus skaitytojas užvers knygą toje nuobodžioje vietoje ir toliau nebeskaitys.

Tuo tarpu šis varginantis būdas iš tiesų buvo geriausias tuo metu. Pas mus jis buvo naudojamas iki XVIII amžiaus vidurio: tarp šešių Leontijaus Magnickio[1] „Aritmetikoje" siūlomų būdų (iš kurių nė vienas nepanašus į šiuolaikinį) yra ir aukščiau aprašytasis; autorius jį ypatingai rekomenduoja; per visą savo didžiulę — 640 didelio formato puslapių — knygą Magnickis naudoja išimtinai „galerų metodą", beje, šio pavadinimo niekur neminėdamas.

Baigdami, pasinaudoję pavyzdžiu iš Tartaljos knygos, parodysime skaitytojui minėtą skaitinę „galerą":

---

[1] Magnickis L. F. (1669—1739) — rusų matematikas. Jis sudarė pirmąjį rusišką matematikos vadovėlį, kuris apėmė visus tuomet žinomus matematikos skyrius (įskaitant ir laivybinės astronomijos žinias). Tai viena iš tų dviejų knygų, kurias Lomonosovas pavadino „savo mokslingumo vartais". Jos smulkus pavadinimas toks:

„Aritmetika, atseit mokslas skaičiavimo, caro Petro Aleksejevičiaus paliepimu didžiajame Maskvos mieste spausdintu žodžiu išminties siekiantiems rusų paauguoliams ir įvairaus rango bei amžiaus žmonėms į šviesą išleistas 1703 vasarą nuo dievo gimimo".

```
                    4 | 6
         88         1 | 3          08
       0999          09           199
       1660          19          0860
      88876        0876         08877
      0999948000000199480000000199994
      1666660000000866600000000866666
Dalijamasis — 8888880000000888800000000888888 (88 — dalmuo)
Daliklis[1] —  999990000000099900000000099999
                 99999000000009990000000099
```

ISMINTINGAS SENOVĖS PAPROTYS

Pasiekę po didelių vargų aritmetinio veiksmo pabaigą, mūsų protėviai laikė būtinu patikrinti šį per prakaitą gautą rezultatą. Griozdiški skaičiavimo metodai kėlė nepasitikėjimą rezultatais. Ilgu, vingiuotu takeliu einant lengviau paklysti, negu einant tiesiu mūsų laikų metodų keliu. Todėl natūralu, kad senovėje atsirado paprotys **patikrinti** kiekvieną atliekamą aritmetinį veiksmą — girtina taisyklė, kurios ne pro šalį ir mums laikytis.

Mėgiamas patikrinimo metodas buvo vadinamasis „devyniukės metodas". Šis puikus metodas neretai aprašomas ir šiuolaikiniuose, ypač užsieniniuose, aritmetikos vadovėliuose.

Tikrinimas devyniuke pagrįstas „liekanų taisykle", kuri nurodo: sumos, padalytos iš kurio nors skaičiaus, liekana yra lygi kiekvieno dėmens, padalyto iš to paties skaičiaus, liekanų sumai. Lygiai taip pat sandaugos liekana yra lygi daugiklių liekanų sandaugai. Iš kitos pusės, žinoma taip pat[2], kad, dalijant skaičių iš 9, gaunama ta pati liekana, kaip ir dalijant iš 9 to skaičiaus skaitmenų sumą; pavyzdžiui, 758 padalijus iš 9, lieka 2, ta pati liekana gaunama (7 + 5 + 8) padalijus iš 9. Sulyginę abi nurodytas savybes, ir gauname tikrinimo devyniuke metodą, t. y. metodą su dalyba iš 9. Išnagrinėsime pavyzdį.

---

[1] Dalikyje dvi paskutinės devyniukės prirašytos dalybos procese.
[2] Tai paaiškėja išvedant dalumo iš 9 požymį.

Tegul reikia patikrinti šitokio stulpelio sudėties teisingumą:

$$
\begin{array}{rr}
38\,932 \;\ldots & 7 \\
1\,096 \;\ldots & 7 \\
+\;4\,710\,043 \;\ldots & 1 \\
589\,106 \;\ldots & 2 \\
\hline
5\,339\,177 \;\ldots & 8
\end{array}
$$

Mintyse sudarome kiekvieno dėmens skaitmenų sumą, o besumuojant gautų dviženklių skaičių skaitmenis taip pat sudedame (tai atliekame pačiame skaitmenų sudėties procese), kol pagaliau gauname vienaženklį rezultatą. Šiuos rezultatus (dalybos iš 9 liekanas) surašome, kaip parodyta pavyzdyje, greta atitinkamų dėmenų. Sudėję visas liekanas ($7+7+1+2=17$; $1+7=8$), gauname 8. Jeigu veiksmas atliktas teisingai, rezultato (5 339 177) skaitmenų suma turi būti tokia pat: $5+3+3+9+1+7+7$ po visų suprastinimų yra lygu 8.

A t i m t i s tikrinama lygiai taip pat, tiktai vietoje sumos čia imamas turinys, o vietoje dėmenų — atėminys ir skirtumas. Pavyzdžiui:

$$
\begin{array}{rr}
6913 \;\ldots & 1 \\
-\;2587 \;\ldots & 4 \\
\hline
4326 \;\ldots & 6
\end{array}
$$

$$4+6=10;\; 1+0=1.$$

Ypatingai patogus šis būdas naudojant d a u g y b o s veiksmui tikrinti, kaip matyti iš šio pavyzdžio:

$$
\begin{array}{rr}
8713 \;\ldots & 1 \\
\times\;264 \;\ldots\times & 3 \\
\hline
34852 \;\ldots & 3 \\
52278 & \\
17426 & \\
\hline
2300232 \;\ldots & 3
\end{array}
$$

Jeigu, taip patikrinus daugybą, randama, kad rezultatas klaidingas, tai, norint rasti, kur būtent padaryta klaida, galima patikrinti devyniukės metodu atskirai kiekvieną dalinę sandaugą; o jeigu čia klaidos nėra, belieka patikrinti dalinių sandaugų sudėtį.

Kaip šiuo metodu tikrinama dalyba? Jeigu turime dalybos be liekanos atvejį, tai dalijamąjį laikome daliklio ir dalmens sandauga. O jeigu dalyba su liekana, laikome, kad dalijamasis = dalikliui $\times$ dalmens + liekana. Pavyzdžiui:

$$\underbrace{16\,201\,387}_{1} : \underbrace{4457}_{2} = \underbrace{3635}_{8};\quad \text{liekana}\ \underbrace{192}_{3}$$

skaitmenų suma:

$$2 \times 8 + 3 = 19;\quad 1 + 9 = 10;\quad 1 + 0 = 1.$$

Duodu iš Magnickio „Aritmetikos“ ten siūlomą patogų išdėstymą tikrinant devyniuke:

D a u g y b a i:

$$\begin{array}{r} \times\begin{array}{r} 365 \\ 24 \end{array} \\ \hline 1460 \\ 730 \\ \hline 8760 \end{array} \qquad \text{„Šis 3} \begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{5} \\ \hline \multicolumn{2}{c}{6} \\ \hline \multicolumn{2}{c}{30} \end{array} \text{3 tą atitinka, nes yra teisingas“}$$

D a l y b a i:

	Dalmens		
	8		
Dalijamojo	1 — 1		„Atitinka teisingą dalybą“
Daliklio	2		
	16		
Liekanos	3		
Visų	1		

Be abejo, panašus veiksmų tikrinimo metodas greitumo ir patogumo prasme yra gana geras. Tačiau to negalima pasakyti apie jo patikimumą: klaida gali pro jį ir prasmukti. Iš tikrųjų, tą pačią skaitmenų sumą gali turėti skirtingi skaičiai; ne tik skaitmenų sukeitimas vietomis, bet kai kada net ir jų pakeitimas kitais skaitmenimis, tikrinant tokiu būdu, lieka nepastebėtas. Pasislepia nuo kontrolės taip pat pridėtinės devyniukės ir nuliai, nes jie nedaro įtakos skaitmenų sumai. Dėl to aklai pasitikėti tokiu tikrinimo būdu būtų neapdairu. *Mūsų* protėviai tai žinojo ir nepasitenkindavo vien tiktai tikrinimu devyniukės pagalba, bet atlikdavo dar papildomą tikrinimą — dažniausiai septyniukės pagalba. Šis metodas pagrįstas ta pačia „liekanų taisykle", bet ne toks patogus, kaip devyniukės būdas, nes, norint rasti liekanas, reikia atlikti ištisai visą dalybą iš 7 (ir dėl to labai galimos klaidos paties tikrinimo veiksmuose).

Du patikrinimai — devyniuke ir septyniuke — yra jau kur kas patikimesnė kontrolė: kas praslysta pro vieną, pačiumpa kitas patikrinimas. Klaida neaptinkama tik tuo atveju, jeigu tikrojo ir gautojo rezultatų skirtumas yra kartotinis skaičiui $7 \times 9 = 63$. Kadangi panašus atsitiktinumas vis dėlto yra galimas, tai ir dvigubas patikrinimas neduoda visiško tikrumo, kad gautas rezultatas yra teisingas.

Beje, paprastiems skaičiavimams, kur suklystama dažniausiai vienu arba dviem vienetais, galima tenkintis tik patikrinimu devyniuke. Papildomas tikrinimas septyniuke pernelyg apsunkina. Tiktai ta kontrolė yra gera, kuri nekliudo dirbti.

Jeigu tačiau, atlikdami atsakingus skaičiavimus, jūs panorėsite atlikti dvigubą patikrinimą, tai vietoje daliklio 7 geriau naudokite 11. Taip darbą galima gerokai supaprastinti, pritaikant šitokį patogų dalumo iš 11 požymį: skaičius suskirstomas į grupes po du skaitmenis iš dešinės į kairę (kraštinėje grupėje iš kairės gali būti ir vienas skaitmuo); grupės sudedamos, ir gautos sumos liekana yra lygi skaičiaus, bandomo dalikliu 11, liekanai: dalydami grupių sumą iš 11, gauname tą pačią liekaną, kaip ir dalydami bandomąjį skaičių.

Tai, kas pasakyta, paaiškinsime pavyzdžiu. Reikia rasti skaičiaus 24 716 dalybos iš 11 liekaną. Skaičių suskirstome į grupes ir sudedame jas:

$$2 + 47 + 16 = 65.$$

Kadangi padaliję 65 iš 11 gauname liekaną 10, tai ir dalydami skaičių 24 716 iš 11 gausime tą pačią liekaną.

Šį metodą aš siūlau dėl to, kad jis tuo pat metu duoda ir skaičių, kurio liekana yra ta pati, kaip ir bandomojo skaičiaus, taip pat ir tikrinant devyniukės pagalba. Tokiu būdu, mes galime patogiai patikrinti iš karto dviem dalikliais: 9 ir 11. Pro tokį tikrinimą gali prasmukti nepastebėta tiktai klaida, kartotinė 99, kuri tegali pasitaikyti labai retai.

AR GERAI DAUGINAME?

Senoviniai daugybos būdai buvo griozdiški ir nepatogūs, tačiau kyla klausimas: ar dabartinis mūsų būdas yra jau toks geras, kad jame negalimi jokie tolesni patobulinimai? Ne, ir mūsų metodas nėra tobulas; galima sugalvoti dar greitesnių ir patikimesnių. Iš kelių pasiūlytų patobulinimų nurodysime tiktai vieną, kuris padidina ne veiksmo atlikimo greitį, bet jo patikimumą. Jo esmė ta, kad daugiaženklių skaičių daugyba pradedama ne nuo paskutinio, o nuo p i r m o j o daugiklio skaitmens. Jau atlikta 40 puslapyje daugyba 8713×264 atrodys dabar taip:

$$
\begin{array}{r}
8713\\
\times\ 264\\
\hline
17426\\
52278\\
34852\\
\hline
2300232
\end{array}
$$

Matome, kad kiekvienos dalinės sandaugos paskutinis skaitmuo rašomas po tuo daugiklio skaitmeniu, iš kurio yra dauginama.

Panašaus išdėstymo pranašumas yra tas, kad dalinių sandaugų skaitmenys, nuo kurių priklauso pirmieji atsakingiausi rezultato skaitmenys, gaunami veiksmo p r a d ž i o j e, kai dėmesys dar neatbukęs, ir, vadinasi, tikimybė suklysti yra mažesnė. (Be to, šitas metodas palengvina pritaikyti vadinamąją „sutrumpintą" daugybą, apie kurią plačiau kalbėti čia negalime.)

„RUSIŠKASIS" DAUGYBOS BŪDAS

Jeigu jūs atmintinai nežinote visų vienaženklių skaičių daugybos rezultatų, t. y. to, kas vadinama daugybos lentele, negalite atlikti jokių daugiaženklių, net ir dviženklių, skaičių daugybos.

Tačiau yra būdas skaičiams dauginti ir nežinant daugybos lentelės. Šį būdą, nepanašų į mūsų mokyklinius metodus, vartoja didžiarusių valstiečiai, kurie jį paveldėjo iš gilios senovės. Naudojant tą metodą, dviejų bet kurių skaičių daugyba suvedama į tai, kad vienas skaičius nuosekliai dalijamas pusiau, kartu padvigubinant antrąjį skaičių. Štai pavyzdys:

$$\begin{array}{r@{\times}l} 32 & 13 \\ 16 & 26 \\ 8 & 52 \\ 4 & 104 \\ 2 & 208 \\ 1 & 416 \end{array}$$

Pusiau dalijama tol, kol dalmenyje gaunamas 1, lygiagrečiai dvigubinant kitą skaičių. Paskutinis padvigubintasis skaičius ir yra ieškomasis rezultatas. Kuo pagrįstas šis metodas, suprasti nesunku: jeigu vienas daugiklis dukart sumažėja, o kitas dukart padidėja, sandauga nepasikeičia. Todėl aišku, kad, tokią operaciją pakartojus daugelį kartų, ir bus gauta ieškomoji sandauga:

$$32 \times 13 = 1 \times 416.$$

Tačiau ką daryti, jeigu tenka dalyti pusiau nelyginį skaičių?

Liaudies metodas lengvai randa išeitį. Jeigu skaičius nelyginis, — skelbia taisyklė, — reikia atmesti vienetą ir dalyti liekaną pusiau; bet užtat prie dešiniojo stulpelio paskutinio skaičiaus reikės p r i d ė t i visus tuos šito stulpelio skaičius, kurie yra ties kairiojo stulpelio n e l y g i n i a i s skaičiais; gautoji suma ir bus ieškomoji sandauga. Praktiškai tai daroma taip: visos eilutės su lyginiais kairiaisiais skaičiais užbraukiamos; palieka tik tos eilutės, kurių kairėje pusėje yra nelyginiai skaičiai. Duodame pavyzdį (žvaigždutėmis pažymėtas eilutes reikia užbraukti):

$$\begin{array}{r@{\times}l} 19 & 17 \\ 9 & 34 \\ 4 & 68^{*} \\ 2 & 136^{*} \\ 1 & 272 \end{array}$$

Sudėję neužbrauktus skaičius, gauname visiškai teisingą rezultatą:

$$17 + 34 + 272 = 323.$$

Kuo pagrįstas šitas metodas?

Metodo pagrįstumas pasidarys aiškus, kai atkreipsime dėmesį į tai, kad

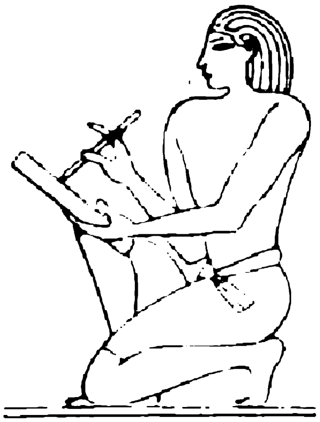
$$19 \times 17 = (18 + 1)\,17 = 18 \times 17 + 17,$$
$$9 \times 34 = (8 + 1)\,34 = 8 \times 34 + 34 \text{ ir t. t.}$$

Aišku, kad, norint gauti sandaugą, skaičius 17, 34 ir pan., kuriuos prarandame dalydami nelyginį skaičių pusiau, reikia pridėti prie paskutinės daugybos rezultato.

IŠ PIRAMIDŽIŲ ŠALIES

Labai galimas dalykas, kad mūsų aprašytasis metodas atėjo pas mus iš giliausios senovės ir iš tolimos šalies — iš Egipto. Mums mažai žinoma, kaip atlikdavo aritmetinius veiksmus senovės Piramidžių šalies gyventojai. Bet išliko įdomus dokumentas — papirusas, kuriame surašyti vienos iš senovės Egipto žemės matavimo mokyklų mokinio aritmetiniai pratimai, — tai vadinamasis „Rindo papirusas“, kuris parašytas laikotarpiu tarp 2000 ir 1700 metų prieš mūsų erą [1] ir yra dar senesnio rankraščio kopija, perrašyta

[1] Papirusą, įdėtą į metalinį futliarą, atrado anglų egiptologas Henri Rindas. Išvyniotas jis yra 20 *m* ilgio ir 30 *cm* pločio. Jis saugojamas Londone, Britų muziejuje.

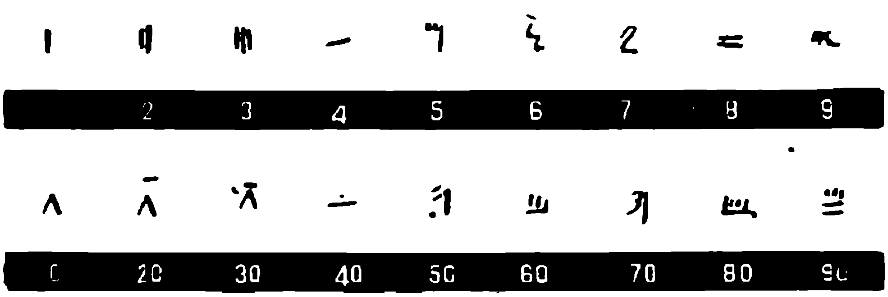


Egiptietiškas raštininko atvaizdas. Senovės Egipte raštininkai priklausė trečiajam šventikų luomui; jie tvarkė šventovės žemes ir statybinę dalį. Raštininkas tų mokslų, kurių reikėjo šioms pareigoms, buvo mokomas 12 metų.

kažkokio Aameso. Raštininkas[1] Aamesas, atradęs šios tolimos epochos „mokinio sąsiuvinėlį", kruopščiai perrašė visus būsimojo žemės matininko aritmetinius pratimus — kartu su jų klaidomis ir mokytojo ištaisymais — ir davė savo nuorašui iškilmingą pavadinimą, kuris pasiekė mus šiuo nepilnu pavidalu:

> „Pamokymas, kaip pažinti visus tamsius daiktus... visas paslaptis, slypinčias daiktuose.
>
> Sudarė Aukštutinio ir Žemutinio Egipto valdovo Ra-a-uso viešpatavimo metais, pagal senų valdovo Ra-en-mato laikų veikalų pavyzdį raštininkas Aamesas".

Tame įdomiame, apie keturiasdešimties šimtmečių senumo dokumente, kalbančiame apie dar gilesnę senovę, mes randame keturis daugybos pavyzdžius, kurie atlikti



Rindo papiruso ieratinio rašto egiptietiškieji skaitmenys.

[1] „Raštininko" vardą turėjo trečioji egiptiečių šventikų klasė; jų uždavinys buvo tvarkyti „visa, kas liečia šventovės statybinę dalį ir jos žemės nuosavybę". Jų svarbiausia specialybė buvo matematinės, astronominės ir geografinės žinios (V. Bobyninas).

būdu, gyvai primenančiu rusų liaudies būdą. Štai tie pavyzdžiai (skaičių priekyje esantieji taškai pažymi daugiklio vienetų skaičių; ženklu + mes pažymėjome skaičius, kuriuos reikia sudėti):

(8 × 8)	(9 × 9)
. 8	. 9 +
. . 16	. . 18
. . . 32	 36
: : : : 64	: : : : 72 +
	Viso . 81
(8 × 365)	(7 × 2801)
. 365	. 2801 +
. . 730	. . 5602 +
. . . . 1460	. . . . 11204 +
: : : : 2920	Viso . . 19607

Iš pavyzdžių matote, kad jau prieš tūkstančius metų egiptiečiai naudojo daugybos būdą, gana panašų į mūsų valstietiškąjį, ir kad nežinomais keliais jis atklydo iš senovės Piramidžių šalies į dabartinę epochą. Jeigu faraonų žemės gyventojui kas nors pasiūlytų padauginti, pavyzdžiui, 19 iš 17, tai jis šį veiksmą atliktų taip: surašytų skaičiaus 17 nuoseklių padvigubinimų eilutę

1	17 +
2	34 +
4	68
8	136
16	272 +

o po to sudėtų skaičius, kurie čia pažymėti ženklu +, t. y. 17 + 34 + 272. Be abejo, jis gautų visai teisingą rezultatą: $17 + (2 \times 17) + (16 \times 17) = 19 \times 17$. Lengva pastebėti, kad panašus metodas iš esmės labai artimas mūsų valstietiškajam (daugybos pakeitimas eile nuoseklių padvigubinimų).

Sunku pasakyti, ar vien tik rusų valstiečiai naudojo tokį senovinį daugybos būdą; anglų autoriai jį vadina tiesiog „rusų valstietiškuoju būdu"; nors ir kai kuriose Vokietijos vietose valstiečiai jį naudoja, bet taip pat vadina „rusiškuoju".

Būtų nepaprastai įdomu sužinoti iš skaitytojų, ar dabar kur nors naudojamas šitas senas daugybos būdas, turįs tokią ilgą ir originalią praeitį. Aplamai, reikėtų daugiau dėmesio skirti liaudies matematikai: gilintis į liaudies vartojamus skaičiavimo ir matavimo metodus, rinkti ir užrašinėti šiuos liaudies matematinės kūrybos paminklus, pasiekusius iš žilos senovės glūdumos mūsų laikus.

Į tokios rūšies darbą įsijungti seniai kvietė matematikos istorikas V. V. Bobyninas [1], kuris pasiūlė net trumpą programą rinkti liaudies matematikos paminklams. Manau bus pravartu čia perduoti jo sudarytą sąrašą to, ką būtent reikia rinkti ir užrašinėti: 1) skaičiavimą ir numeraciją, 2) matavimo ir svėrimo būdus, 3) geometrines žinias ir jų išraišką pastatuose, parėduose ir papuošaluose, 4) laukų matavimo būdus, 5) liaudies uždavinius, 6) patarles, mįsles ir kitokią žodinę liaudies kūrybą, susijusią su matematinėmis žiniomis, 7) senovinės liaudies matematikos paminklus, esančius rankraščiuose, muziejuose, kolekcijose ir t. t., arba randamus kasinėjant milžinkapius, kapus, piliakalnius ir kt.

ARITMETINIAI KURIOZAI

$$91 + \frac{5823}{647} = 100; \quad 94 + \frac{1578}{263} = 100; \quad 96 + \frac{1428}{357} = 100$$

[1] Bobyninas V. V. (1849—1919) — pirmasis matematikos istorikas Rusijoje.

KETVIRTASIS SKYRIUS

NEDEŠIMTAINĖS SKAIČIAVIMO SISTEMOS

Šį skyrių pradėsiu uždaviniu, kurį aš kažkada sugalvojau seno paplitusio žurnalo[1] skaitytojams kaip „premijinį uždavinį“.

Štai jis:

„Mįslinga autobiografija

Tarp vieno keistuolio matematiko rankraščių buvo rasta jo autobiografija. Ji prasidėjo tokiomis eilutėmis:

„Universiteto kursą aš baigiau, turėdamas 44 metus. Po metų, būdamas 100-mečiu jaunuoliu, vedžiau 34 metų merginą. Nežymus mūsų amžių skirtumas — iš viso 11 metų — užtikrino tai, kad mes gyvenome bendrais interesais ir svajonėmis. Po nedaugelio metų aš jau turėjau ir nedidelę šeimą iš 10 vaikų. Mano alga buvo 200 rub. per mėnesį; $^{1}/_{10}$ jos atiduodavau seseriai, ir mes su vaikais gyvendavome iš 130 rub. per mėnesį“ ir t. t.

Kuo paaiškinti keistus prieštaravimus tarp šitos ištraukos skaičių?“

---

[1] „Природа и люди“ (vėliau jis buvo perspausdintas J. I. Ignatjevo rinkinyje „В царстве смекалки“).

Uždavinio sprendimą nurodo šio skyriaus pavadinimas: nedešimtainė skaičiavimo sistema — štai vienintelė tariamojo skaičių prieštaringumo priežastis. Pačiupus šią mintį, nesunku suvokti, kokioje būtent skaičiavimo sistemoje keistuolis matematikas išreiškė skaičius. Paslaptį atskleidžia frazė: „po metų (skaitant nuo 44 metų), būdamas 100-mečiu jaunuoliu..." Jeigu, pridėjus vieną vienetą, skaičius 44 tampa 100, tai, reiškia, skaitmuo 4 duotoje sistemoje yra **didžiausias** (kaip 9 — dešimtainėje), o sistemos pagrindas yra 5. Keistuolis matematikas sumanė visus savo biografijos skaičius parašyti **penketainėje skaičiavimo sistemoje**, t. y. tokioje, kurioje aukštesnio skyriaus vienetas yra ne 10, bet 5 kartus didesnis už žemesniojo skyriaus vienetą; pirmoje vietoje iš dešinės stovi paprasti vienetai (ne aukščiau keturių), antroje — ne dešimtys, bet penketai; trečioje — ne šimtai, bet „dvidešimtpenkiukės" ir t. t. Todėl skaičius, biografijos tekste parašytas „44", reiškia ne $4 \times 10 + 4$, kaip dešimtainėje sistemoje, bet $4 \times 5 + 4$, t. y. 24.

Lygiai taip pat skaičius „100" autobiografijoje reiškia vieną penketainės sistemos trečio skyriaus vienetą, t. y. 25. Kiti užrašų skaičiai atitinkamai reiškia:

„34" $= 3 \times 5 + 4 = 19$,
„11" $= 5 + 1 = 6$,
„200" $= 2 \times 25 = 50$,
„10" $= 5$,
„$^1/_{10}$" $= {}^1/_5$,
„130" $= 25 + 3 \times 5 = 40$.

Atstatę tikrąją biografijos skaičių prasmę, matome, kad jokių prieštaravimų joje nėra:

Universiteto kursą aš baigiau, turėdamas 24 metus. Po metų, būdamas 25 metų jaunuoliu, vedžiau 19 metų merginą. Nežymus mūsų amžiaus skirtumas — iš viso 6 metai — užtikrino tai, kad mes gyvenome bendrais interesais ir svajonėmis. Po nedaugelio metų aš jau turėjau nedidelę *šeimą iš 5 vaikų. Mano alga buvo 50 rub. per mėnesį; $^1/_5$ jos atiduodavau seseriai, ir mes su vaikais gyvendavome iš 40 rub. per mėnesį.*

Ar sunku vaizduoti skaičius kitose skaičiavimo sistemose? Nė kiek. Sakysime, jūs norite 119 pavaizduoti penketainėje sistemoje. Dalijate 119 iš 5, kad sužinotumėte, kiek tame skaičiuje yra p i r m o j o skyriaus vienetų:

$$119 : 5 = 23, \text{ liekana } 4.$$

Reiškia, paprastų vienetų yra 4. Toliau, 23 penkiukės negali stovėti visos antrame skyriuje, nes aukščiausias penketainės sistemos skaitmuo yra 4, ir kiekviename tokios skaičiavimo sistemos skyriuje gali būti ne daugiau kaip 4 vienetai. Todėl 23 dalijame iš 5:

$$23 : 5 = 4, \text{ liekana } 3.$$

Tai rodo, kad antrame (penketų) skyriuje bus skaitmuo 3, o trečiame („dvidešimtpenkiukių") — 4.

Tokiu būdu, $119 = 4 \times 25 + 3 \times 5 + 4$, arba p e n k e t a i n ė j e sistemoje „434".

Kad būtų patogiau, atlikti veiksmai išdėstomi taip:

$$\begin{array}{r|l} 119 & 5 \\ \hline \mathit{4} & \begin{array}{r|l} 23 & 5 \\ \hline \mathit{3} & \mathit{4} \end{array} \end{array}$$

Kursyviniai skaitmenys (rašant ranka, juos galima pabraukti) surašomi iš dešinės į kairę ir iš karto gaunama skaičiaus išraiška kitoje sistemoje.

Duosime dar pavyzdžių.

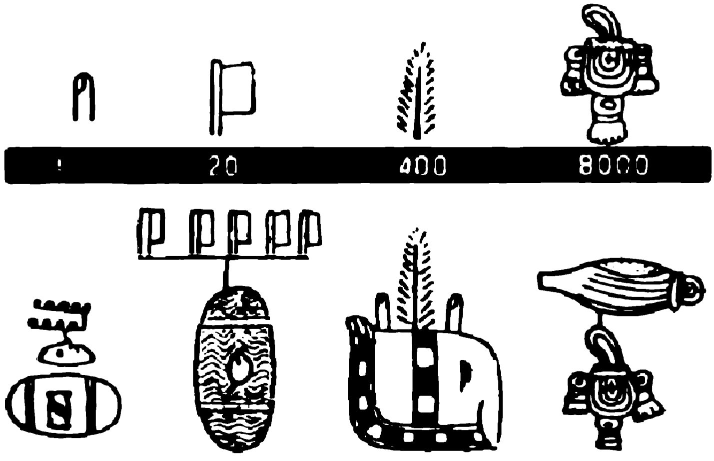
1 pavyzdys.

Atvaizduoti 47 t r e j e t a i n ė j e sistemoje.

S p r e n d i m a s:

$$\begin{array}{r|l} 47 & 3 \\ \hline \mathit{2} & \begin{array}{r|l} 15 & 3 \\ \hline \mathit{0} & \begin{array}{r|l} 5 & 3 \\ \hline \mathit{2} & \mathit{1} \end{array} \end{array} \end{array}$$

A t s a k y m a s: „1202". Patikrinimas: $1 \times 27 + 2 \times 9 + 0 \times 3 + 2 = 47$.



A B C D

Meksikos actekų skaičiavimo sistema buvo dvidešimtainė. Kiekybes iki 20 jie vaizdavo taškų arba pirštų skaičiumi; 20-čiai piešdavo vėliavą; skaičius 400 (20 × 20) buvo pažymimas panašiu į eglę ženkliuku, kuris reiškė — „daug kaip plaukų". Didžiausiam skaičiavimo vienetui — 8 000 (20 × 20 × 20) — buvo piešiamas maišiukas: jis simbolizavo milžinišką kakao pupelių kiekį maiše. Actekai, norėdami pavaizduoti kokį nors daiktų skaičių, tiesiog greta to daikto vaizdo nupiešdavo reikalingą skaitmeninį ženkliuką: pavyzdžiui, piešinys *A* reiškia 9 kaukes iš brangaus akmens; *B* — 100 maišų kakao; *C* — 402 medvilnines nurodyto rašto antklodes; *D* — 8000 gumos medžio lapų ryšulėlių.

2 pavyzdys.

Atvaizduoti 200 s e p t y n e t a i n ė j e sistemoje.

S p r e n d i m a s:

$$
\begin{array}{r|r|l}
200 & 7 & \\
14 & 28 & 7 \\
\hline
60 & \mathit{0} & \mathit{4} \\
\hline
\mathit{4} & & \\
\end{array}
$$

A t s a k y m a s: „404". Patikrinimas: $4 \times 49 + 0 \times 7 + 4 = 200$.

3 pavyzdys.

Atvaizduoti 163 d v y l i k t a i n ė j e sistemoje.

S p r e n d i m a s:

$$
\begin{array}{r|r|l}
163 & 12 & \\
\hline
43 & 13 & 12 \\
\hline
\mathit{7} & \mathit{1} & \mathit{1} \\
\end{array}
$$

Atsakymas: „117“. Patikrinimas: $1 \times 144 + 1 \times \times 12 + 7 = 163$.

Dabar skaitytojui bus nesunku atvaizduoti bet kurį skaičių bet kokioje skaičiavimo sistemoje. Vienintelė galima kliūtis gali būti ta, kad kai kuriais atvejais gali trūkti *skaitmeninių ženklų*. Ir iš tiesų: vaizduojant skaičius sistemose, kurių pagrindas didesnis kaip dešimt (pavyzdžiui, dvyliktainėje), gali prireikti 'skaitmenų „*dešimt*“ ir „*vienuolika*“. Paprastai tokiais atvejais reikia naujiems skaitmenims parinkti kokius nors sutartinius ženklus arba raides — pavyzdžiui, nors ir raides K ir L.

Pavyzdžiui, skaičius 1579 *dvyliktainėje* sistemoje atvaizduojamas taip:

```
1579| 12
12  |----
----| 131| 12
 37 |  11| 10
----
  19
----
   7
```

Atsakymas: „(10) (11)7“, arba KL7. Patikrinimas: $10 \times 144 + 11 \times 12 + 7 = 1579$.

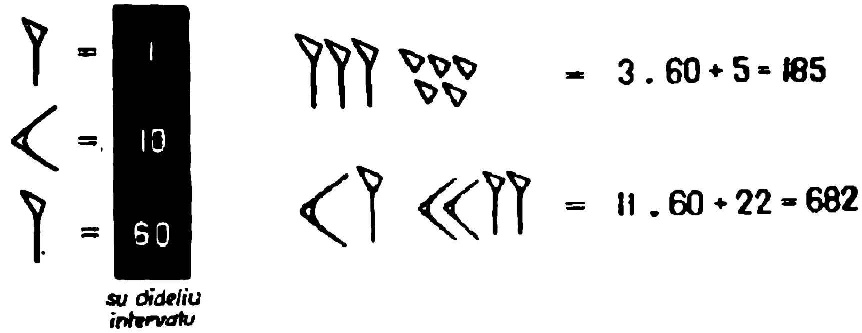
Atvaizduokite:

1) Skaičių 1926 dvyliktainėje sistemoje.
2) Skaičių 273 dvidešimtainėje sistemoje.

PAPRASČIAUSIA SKAIČIAVIMO SISTEMA

Nesunku suprasti, kad kiekvienos sistemos aukščiausias skaitmuo, kuris gali būti reikalingas, yra lygus tos sistemos pagrindui minus vienetas. Pavyzdžiui, dešimtainėje sistemoje aukščiausias skaitmuo yra 9, šešetainėje sistemoje — 5, trejetainėje — 2, penkioliktainėje — 14 ir t. t.

Paprasčiausia skaičiavimo sistema yra, žinoma, ta, kuriai reikia mažiausia skaitmenų. Dešimtainėje sistemoje reikia dešimties skaitmenų (įskaitant ir 0), penketainėje — penkių, trejetainėje — trijų (1, 2 ir 0), dvejetainėje — tiktai dviejų (1 ir 0).



Babiloniečių šešiasdešimtainės sistemos dantiraštiniai skaitmenys. Sveikus skaičius babiloniečiai žymėdavo iš viso dviem ženklais — 1 ir 10; 60 buvo vaizduojama vieneto ženklu, kuris buvo rašomas atokiau nuo sekančių skaitmenų.

Ar yra ir „vienetainė“ sistema? Be abejo, — tai yra tokia sistema, kurioje aukštesnio skyriaus vienetai yra v i e n ą k a r t ą didesni už žemesnio skyriaus vienetus, t. y. jai lygūs; kitaip sakant, „vienetaine“ galima pavadinti tokią sistemą, kurioje visų skyrių vienetai turi v i e n o d ą reikšmę. Tai primityviausia „sistema“; ją naudojo pirmykštis žmogus, darydamas medyje tiek įkirčių, kiek suskaičiuodavo daiktų. Bet tarp jos ir visų kitų skaičiavimo sistemų yra didžiulis skirtumas: vienetainė sistema neturi svarbiausio mūsų numeracijos pranašumo — vadinamosios s k a i t m e n ų v i e t o s r e i k š m ė s. Iš tikrųjų: „vienetainėje“ sistemoje ženklas, esąs trečioje arba penktoje vietoje, reiškia tą patį, kaip ir esąs pirmoje vietoje. Tuo tarpu net dvejetainėje sistemoje vienetas trečioje vietoje (iš dešinės) yra jau keturis kartus (2×2) didesnis, negu pirmoje, o penktoje vietoje — 16 kartų ($2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$). Rašant kokį nors skaičių „vienetainėje“ sistemoje, reikia kaip tik tiek ženklų, kiek buvo suskaičiuota daiktų: užrašyti šimtui daiktų reikia šimto ženklų. O dvejetainėje sistemoje šimtas užrašomas septyniais („1100100“), penketainėje — tik trimis ženklais („400“).

Štai kodėl „vienetainę“ sistemą vargu ar galima pavadinti „sistema“; bent jau jos negalima pastatyti greta kitų, nes ji iš esmės skiriasi nuo jų, neduodama skaičių vaizdavime jokios ekonomijos. Jeigu ją atmesime, tai paprasčiausia sistema teks laikyti d v e j e t a i n ę sistemą, kurioje naudojami tik du skaitmenys: 1 ir 0. Vieneto ir nulio pagalba galima atvaizduoti visą begalinę daugybę skaičių. Praktiškai tokia sistema nelabai patogi — gaunami perdaug ilgi skaičiai[1]; bet teoriškai turime teisę ją laikyti paprasčiausia. Ji turi kai kurias įdomias ypatybes, būdingas tik jai vienai; šiomis ypatybėmis, tarp kitko, galima pasinaudoti atlikti eilei efektyvių matematinių pokštų, apie kuriuos greit kalbėsimės skyriuje „Pokštai be apgaulės“.

NEĮPRASTA ARITMETIKA

Prie aritmetinių veiksmų mes tiek pripratę, kad juos atliekame automatiškai, beveik negalvodami, ką mes darome. Tačiau, jeigu skaičiai parašyti ne dešimtainėje sistemoje, tie patys veiksmai pareikalaus iš mūsų nemaža pastangų. Pavyzdžiui, pabandykite sudėti šiuos du skaičius, parašytus p e n k e t a i n ė j e sistemoje:

$$\begin{array}{r} „4203“ \\ + \; „2132“ \\ \hline \end{array} \text{ (penketainėje sistemoje)}$$

Sudedame pagal skyrius, pradėdami nuo vienetų, t. y. iš dešinės: 3 + 2 lygu 5; tačiau rašyti 5 mes negalime, nes penketainėje sistemoje tokio skaitmens nėra: 5 yra jau aukštesnio skyriaus vienetas. Reiškia, sumoje visiškai nėra vienetų; rašome 0, o 5, t. y. sekančio skyriaus vienetą, laikome mintyse. Toliau, $0 + 3 = 3$, be to, dar vienetas mintyse, — iš viso 4 antro skyriaus vienetai. Trečiame skyriuje gauname $2 + 1 = 3$. Ketvirtame $4 + 2$ lygu 6, t. y. $5 + 1$;

[1] Užtat, kaip pamatysime toliau, tokioje sistemoje labai supaprastėja sudėties ir daugybos lentelės.

rašome 1, o 5, t. y. aukštesnio skyriaus vienetą, perkeliame toliau į kairę.

Ieškomoji suma = 11 340.

```
  „4203“
+ „2132“  (penketainėje sistemoje)
  ———————
 „11340“
```

Skaitytojas pats patikrins šią sudėtį, prieš tai kabutėse esančius skaičius pervedęs į dešimtainę sistemą.

Lygiai taip pat atliekami ir kiti veiksmai. Pratyboms žemiau duodame eilę pavyzdžių, kurių daugiau skaitytojas, jei turi noro, gali pats sudaryti:

```
Penketainėje sistemoje    „2143“      „213“     „42“
                        − „334“     × „3“     × „31“
                          ——————    ——————    ——————

Trejetainėje sistemoje    „212“       „122“     „220“ : „2“ =
                        + „120“     × „20“      „201“ : „12“ =
                          „201“     ——————
                          ——————
```

Atlikdami šiuos veiksmus, mes iš pradžių parašytus skaičius mintyse atvaizduojame mums įprastoje dešimtainėje sistemoje, o gautą rezultatą vėl pervedame į reikiamą nedešimtainę sistemą. Bet galima eiti ir kitu keliu: sudaryti „sudėties lentelę“ ir „daugybos lentelę“ tose pačiose sistemose, kuriose duoti skaičiai, ir tiesiog jomis naudotis. Pavyzdžiui, penketainės sistemos sudėties lentelė yra tokia:

0	1	2	3	4
1	2	3	4	10
2	3	4	10	11
3	4	10	11	12
4	10	11	12	13

Naudodami šią lentelę, skaičius „4203“ ir „2132“, parašytus penketainėje sistemoje, galėtume sudėti kur kas mažiau įtempdami dėmesį, negu naudodami būdą, kurį jau naudojome anksčiau.

Atimties veiksmas taip pat supaprastėja.

Sudarysime ir daugybos („Pitagoro“ [1]) lentelę penketainei sistemai:

1	2	3	4
2	4	11	13
3	11	14	22
4	13	22	31

Turėdami prieš akis tokią lentelę, jūs vėl galite palengvinti sau skaičių, duotų penketainėje sistemoje, daugybą (ir dalybą); tuo lengva įsitikinti, panaudojus ją aukščiau duotiems pavyzdžiams. Pavyzdžiui, daugindami

$$\text{penketainėje sistemoje} \quad \begin{array}{r} \times\ „213“ \\ „3“ \\ \hline „1144“ \end{array}$$

samprotaujame taip: triskart trys = „14“ (iš lentelės); 4 rašome, 1 — mintyse. 1 padauginta iš 3 lygu 3, be to, dar 1, — rašome 4. Dukart trys = „11“; 1 rašome, 1 perkeliame kairiau. Rezultatą gauname „1144“.

Kuo mažesnis sistemos pagrindas, tuo mažesnės ir atitinkamos sudėties ir daugybos lentelės. Pavyzdžiui, trejetainei sistemai abi lentelės yra tokios:

---

[1] Pitagoras (VI a. prieš mūsų erą) — senovės graikų filosofas; jis taip pat domėjosi matematika ir muzikos teorija.

Sudėties lentelė trejetainei sistemai:

0	1	2
1	2	10
2	10	11

Pitagoro lentelė trejetainei sistemai:

1	2
2	11

Jas būtų galima iš karto įsidėmėti ir naudoti atliekant veiksmus. Mažiausios sudėties ir daugybos lentelės yra dvejetainei sistemai:

Sudėties lentelė dvejetainei sistemai:

0	1
1	10

Daugybos lentelė dvejetainei sistemai:

$1 \times 1 = 1$

Šitokių paprastų „lentelių" pagalba galima atlikti dvejetainėje sistemoje visus keturis veiksmus. Daugybos tokioje sistemoje faktiškai lyg ir visai nėra: juk padauginti iš 1 — reiškia palikti skaičių nepakeistą; o dauginimas iš „10", „100", „1000" (t. y. iš 2, iš 4, iš 8) yra paprastas atitinkamo skaičiaus nulių prirašymas iš dešinės pusės. Kai dėl sudėties, tai šiam veiksmui atlikti reikia atminti tik viena — kad dvejetainėje sistemoje $1 + 1 = 10$. Kaip matome, mes ne be pagrindo dvejetainę sistemą aukščiau pavadinome paprasčiausia iš visų galimų. Už šios savotiškos aritmetikos skaičių ilgumą mums atlygina visų aritmetinių veiksmų su tais skaičiais paprastumas. Tegul, pavyzdžiui, reikia sudauginti:

Dvejetainėje sistemoje

$$
\begin{array}{r}
\text{„1001011101"} \\
\times \quad \text{„100101"} \\
\hline
\text{„1001011101"} \\
+ \text{„1001011101"} \quad \\
\text{„1001011101"} \qquad \\
\hline
\text{„101011101110001"}
\end{array}
$$

Veiksmo atlikimas suvedamas tiktai į ilgų skaičių perrašinėjimą atitinkama tvarka: tam reikia nepalyginamai mažiau protinių pastangų, negu tų pačių skaičių daugybai dešimtainėje sistemoje ($605 \times 37 = 22\,385$).

Jeigu pas mus būtų priimta dvejetainė sistema, išmokti *rašytiniam* skaičiavimui reikėtų mažiausių minties pastangų (užtat — daugiausia popieriaus ir rašalo). Tačiau *mintiniame* skaičiavime dvejetainė aritmetika veiksmų atlikimo patogumo atžvilgiu žymiai atsilieka nuo mūsų dešimtainės.

Duodame taip pat *dalybos* dvejetainėje sistemoje pavyzdį:

$$\begin{array}{l} 10000010 : 111 = 10010 \\ \underline{111} \\ 1001 \\ \underline{111} \\ 100 \end{array}$$

Įprastinėje dešimtainėje sistemoje šitas veiksmas būtų tokio pavidalo:

$$\begin{array}{l} 130 : 7 = 18 \\ \underline{7} \\ 60 \\ \underline{56} \\ 4 \end{array}$$

Dalijamasis, daliklis, dalmuo ir liekana abiem atvejais iš esmės yra vienodi, bet tarpiniai skaičiai skirtingi.

LYGINIS AR NELYGINIS?

Nematant skaičiaus, sunku, žinoma, jį spėti, koks jis — lyginis ar nelyginis. Tačiau negalvokite, kad visada galėsite tai pasakyti, vos pamatę skaičių. Pasakykite, pavyzdžiui, ar skaičius 16 yra lyginis, ar nelyginis?

Jeigu jūs žinote, kad jis parašytas pagal dešimtainę sistemą, galite tvirtinti, kad šis skaičius — lyginis. Bet kai jis parašytas pagal kurią nors kitą sistemą — ar galima būti tikram, kad jis vaizduoja būtent lyginį skaičių?

Pasirodo, ne. Jeigu pagrindas, pavyzdžiui, yra septyni, tai „16“ reiškia $7+6=13$, skaičius nelyginis. Taip bus ir kiekvienam nelyginiam pagrindui (nes kiekvienas nelyginis skaičius $+6$ yra taip pat nelyginis skaičius).

Iš čia gauname išvadą, kad mums žinomas dalumo iš 2 požymis (paskutinis skaitmuo lyginis) yra absoliučiai teisingas tiktai dešimtainei skaičiavimo sistemai, o kitoms sistemoms — ne visuomet. Būtent, jis yra teisingas tiktai skaičiavimo sistemoms su l y g i n i a i s pagrindais: šešetainei, aštuonetainei ir pan. Koks gi dalumo iš 2 požymis sistemoms su n e l y g i n i u pagrindu? Neilgai galvojus, jis randamas: skaitmenų suma turi būti lyginė. Pavyzdžiui, skaičius „136“ yra lyginis kiekvienoje skaičiavimo sistemoje, net ir su nelyginiu pagrindu; iš tiesų, pastaruoju atveju turime: nelyginis skaičius[1] + nelyginis skaičius + lyginis = lyginiam skaičiui.

Panašus atsargumas yra reikalingas atsakant į klausimą: ar visada 25 dalijasi iš 5? Septynetainėje arba aštuonetainėje sistemoje taip atvaizduotas skaičius iš 5 nesidalija (nes jis lygus 19 arba 21). Lygiai taip pat visiems žinomas dalumo iš 9 požymis (pagal skaitmenų sumą) yra teisingas tiktai dešimtainei sistemai. Priešingai, tas pats požymis penketainėje sistemoje teisingas dalumui iš 4, o, pavyzdžiui, septynetainėje — iš 6. Pavyzdžiui, penketainėje sistemoje skaičius „323“ dalijasi iš 4, nes $3+2+3=8$, o skaičius „51“ septynetainėje — iš 6 (lengva įsitikinti, pervedus skaičius į dešimtainę sistemą: gauname atitinkamai 88 ir 36). Kodėl taip, skaitytojas supras pats, jeigu jis gerai įsigilins į dalumo iš 9 požymio išvedimą, o po to tuos pačius samprotavimus, atitinkamai pakeitęs, pritaikys.

---

[1] Nelyginis skaičius, padaugintas iš savęs (t. y. iš nelyginio), visuomet duoda nelyginį skaičių (pavyzdžiui, $7\times7=49$; $11\times11=121$ ir pan.).

pavyzdžiui, septynetainėje sistemoje išvesti dalumo iš 6 požymiui.

Sunkiau yra grynai aritmetiniu keliu įrodyti šių teiginių teisingumą:

$121 : 11 = 11$	visose skaičiavimo sistemose
$144 : 12 = 12$	(kuriose yra atitinkami skait-
$21 \times 21 = 441$	menys)

Kas žino algebrą, lengvai suras šitų lygybių savybę paaiškinantį pagrindą. Kiti skaitytojai gali jas patikrinti įvairiose skaičiavimo sistemose.

Pamokantieji uždaviniai

1. Kada $2 \times 2 = 100$?
2. Kada $2 \times 2 = 11$?
3. Kada 10 — nelyginis skaičius?
4. Kada $2 \times 3 = 11$?
5. Kada $3 \times 3 = 14$?

Skaitytojas, kuris susipažino su šiuo „Įdomiosios aritmetikos" skyriumi, turi nesunkiai atsakyti į čia duotus klausimus.

TRUPMENOS BE VARDIKLIO

Mes įpratome be vardiklio rašyti tiktai dešimtaines trupmenas. Todėl iš pirmo pažiūrėjimo atrodo, kad parašyti tiesiog be vardiklio trupmenas $^2/_7$ arba $^1/_3$ negalima. Tačiau reikalas visai pasikeis, jei prisiminsime, kad trupmenos be vardiklių yra galimos ir kitose skaičiavimo sistemose. Pavyzdžiui, ką reiškia trupmena „0,4" penketainėje sistemoje? Be abejo, $^4/_5$. Trupmena „1,2" septynetainėje sistemoje reiškia $1^2/_7$. O ką reikš toje pačioje septynetainėje sistemoje trupmena „0,33"? Šituo atveju rezultatas yra sudėtingesnis: $^3/_7 + {^3/_{49}} = {^{24}/_{49}}$.

Panagrinėsime dar keletą nedešimtainių trupmenų be vardiklio. Kam yra lygu

a) „2,121" trejetainėje sistemoje?
b) „1,011" dvejetainėje sistemoje?

c) „3,431“ penketainėje sistemoje?
d) „2,(5)“ septynetainėje sistemoje?

Atsakymai:

a) $2+{}^{1}/_{3}+{}^{2}/_{9}+{}^{1}/_{27}=2^{16}/_{27}$.
b) $1+{}^{1}/_{4}+{}^{1}/_{8}=1^{3}/_{8}$.
c) $3+{}^{4}/_{5}+{}^{3}/_{25}+{}^{1}/_{125}=3^{116}/_{125}$.
d) $2+{}^{5}/_{7}+{}^{5}/_{49}+{}^{5}/_{343}+\ldots=2^{5}/_{6}$.

Pastarosios lygybės teisingumu skaitytojas lengvai galės įsitikinti, jeigu pabandys duotam atvejui pritaikyti, atitinkamai pakeitęs, samprotavimus, taikomus verčiant dešimtaines periodines trupmenas paprastosiomis.

Pabaigai išnagrinėsime keletą ypatingos rūšies uždavinių:

Uždavinys Nr. 1

Kokioje skaičiavimo sistemoje atlikta ši sudėtis:

$$\begin{array}{r} 756 \\ 307 \\ +\ 2456 \\ 24 \\ \hline 3767 \end{array}$$

Uždavinys Nr. 2

Kokioje skaičiavimo sistemoje atlikta dalyba:

$$\begin{array}{l} 4415400 : 4532 = 543 \\ \underline{40344} \\ 34100 \\ \underline{31412} \\ 22440 \\ \underline{22440} \end{array}$$

Uždavinys Nr. 3

Skaičių 130 parašykite visose skaičiavimo sistemose: nuo dvejetainės iki devynetainės imtinai.

Uždavinys Nr. 4

Kam lygus skaičius „123“, laikant, kad jis yra parašytas visose skaičiavimo sistemose, iki devynetainės imtinai? Ar yra galimas dalykas, kad jis parašytas dvejetainėje sistemoje? O trejetainėje? Jeigu jis parašytas penketainėje sistemoje, tai ar galite sužinoti, neperrašę jo pagal dešimtainę sistemą, ar jis dalijasi iš 2 be liekanos? Jeigu jis parašytas septynetainėje sistemoje, tai ar dalijasi jis iš 6 be liekanos? Jeigu jis parašytas dešimtainėje sistemoje, tai ar dalijasi jis iš 4 be liekanos?

ARITMETINIS KURIOZAS

$$2^5 \cdot 9^2 = 2592$$

365
1001

PENKTASIS SKYRIUS

SKAITINIŲ KEISTENYBIŲ GALERIJA

ARITMETINĖ KUNSTKAMERA[1]

Skaičių pasaulyje, kaip ir gyvų būtybių pasaulyje, pasitaiko tikrų keistenybių, retų egzempliorių, turinčių ypatingas savybes. Iš tokių nepaprastų skaičių būtų galima sudaryti savotišką skaitinių retenybių muziejų, tikrą „aritmetinę kunstkamerą". Jos vitrinose būtų galima išdėstyti ne tik skaičius milžinus, apie kuriuos kalbėsime atskirame skyriuje, bet ir kuklaus dydžio skaičius, užtat išsiskiriančius iš kitų kokiomis nors nepaprastomis savybėmis. Kai kurie jų jau savo išore atkreipia dėmesį; kiti savo keistas ypatybes atveria tiktai arčiau susipažinus su jais.

Mūsų „galerijoje" demonstruojamos kai kurių skaičių įdomios ypatybės neturi nieko bendro su tomis įsivaizduojamomis keistenybėmis, kurias įžvelgia kai kuriuose skaičiuose paslaptingumo mėgėjai. Panašių skaitinių prietarų

---

[1] K u n s t k a m e r a — besistemis rinkinys įvairiausių retenybių — meninių, gamtinių-istorinių ir kt.; tokio rinkinio patalpa.

pavyzdys yra toks aritmetinis samprotavimas, neatsargiai pateiktas žymaus prancūzų rašytojo Viktoro Hugo.

„Trys — tobulas skaičius. Vienetas skaičiui 3 yra tas pats, kas apskritimui skersmuo. Tarp kitų skaičių 3 tas pat, kaip apskritimas tarp figūrų. Skaičius 3 — vienintelis, kuris turi centrą. Kiti skaičiai — elipsės, turinčios du židinius. Iš čia tokia ypatybė, būdinga vieninteliam skaičiui 3: sudėkite bet kurio skaičiaus, kartotinio 3, skaitmenis, ir suma visada dalysis iš 3 be liekanos".

Šiame miglotame ir neva gilios prasmės „atradime" viskas neteisinga: kiekvienoje frazėje arba nesąmonė, arba išvis beprasmybė. Teisinga tėra pastaba apie skaitmenų sumą, bet ta savybė neišplaukia iš to, kas pasakyta, ir, be to, nėra išimtinė skaičiaus 3 savybė: dešimtainėje sistemoje tokią savybę turi ir skaičius 9, o visose bendrai sistemose — skaičiai, vienetu mažesni už pagrindą.

Mūsų galerijos keistenybės — kitos rūšies: jose nėra nieko paslaptingo arba neįspėto.

Kviečiu skaitytoją atlikti ekskursiją po tokių skaitinių keistenybių galeriją ir susipažinti su kai kuriomis iš jų.

Praeisime nesustodami pro pirmąsias vitrinas, demonstruojančias skaičius, kurių savybės mums gerai žinomos. Mes jau žinome, kodėl į keistenybių galeriją pateko skaičius 2: ne todėl, kad jis pirmasis lyginis skaičius [1], bet todėl, kad jis — įdomiausios skaičiavimo sistemos pagrindas (žr. 58 psl.).

Nenustebsime, radę čia skaičių 5 — vieną iš mūsų mėgiamiausių skaičių, kuris labai svarbus yra įvairiuose „apvalinimuose". Nebus mums staigmena rasti čia ir skaičių 9 — aišku, ne kaip „pastovumo simbolį" [2], bet kaip

---

[1] Pirmuoju lyginiu skaičiumi, beje, galima laikyti ne 2, bet 0.

[2] Senovės matematikai (Pitagoro pasekėjai) skaičių 9 laikė pastovumo simboliu, „nes visų skaičių, kartotinių 9, skaitmenų suma yra kartotinė 9".

skaičių, palengvinantį visų aritmetinių veiksmų tikrinimą (žr. 39 psl.). Bet štai vitrina, po kurios stiklu matomas.

SKAIČIUS 12

Kuo jis įžymus? Tai mėnesių skaičius per metus ir vienetų skaičius tuzine. Bet kas iš esmės ypatinga tuzine? Nedaugelis žino, kad 12 — senas ir vos nelaimėjęs skaičiaus 10 konkurentas kovoje už garbingą skaičiavimo sistemos pagrindo postą. Kultūringiausia senovės Rytų tauta — babiloniečiai ir jų pirmtakai, gyvenę dviejų upių santakoje, vartojo dvyliktainę skaičiavimo sistemą. Ir jeigu ne nugalėjusi įtaka iš Indijos, davusios mums dešimtainę skaičiavimo sistemą, mes, galimas daiktas, būtume paveldėję iš Babilonijos dvyliktainę sistemą. Kai kur mes ir lig šiolei tai sistemai atiduodame duoklę, nors nugalėjo dešimtainė sistema. Mūsų palinkimas skaičiuoti tuzinais ir grosais [1], mūsų paros padalijimas į du tuzinus valandų, o valandos padalijimas į 5 tuzinus minučių, minutės padalijimas į tiek pat sekundžių, apskritimo padalijimas į 30 tuzinų laipsnių, pagaliau pėdos skirstymas į 12 colių [2], — ar visa tai (ir daug kitų pavyzdžių) neliudija, kokia didžiulė yra tos senosios sistemos įtaka mūsų dienomis?

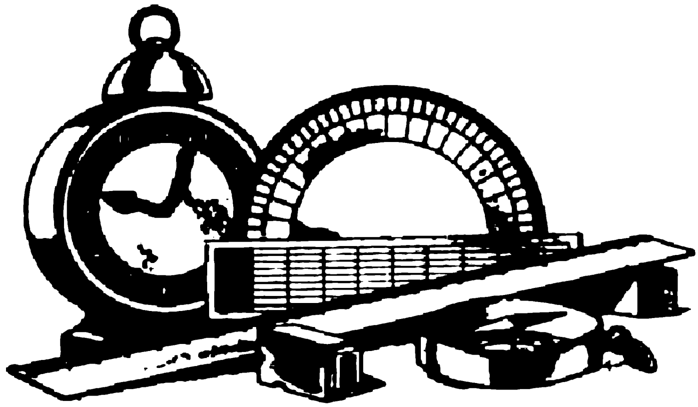
Kyla klausimas: ar gerai, kad tuzino ir dešimties kovoje nugalėjo pastaroji? Be abejo, stiprūs dešimties sąjungininkai buvo ir pasiliko mūsų pačių rankos su d e š i m č i a pirštų — gyvos skaičiavimo mašinos. Bet jeigu to nebūtų, tai, be abejo, reikėtų teikti pirmenybę 12 prieš 10. Dvyliktainėje sistemoje žymiai patogiau atlikti skaičiavimus, negu dešimtainėje. Priežastis ta, kad skaičius 10 dalijasi be liekanos iš 2 ir iš 5, tuo tarpu 12 dalijasi ir iš 2, ir iš 3, ir iš 4, ir iš 6. Dešimtis turi tik du daliklius, o 12 — keturis.

---

[1] G r o s a s — 12 tuzinų. Pavyzdžiui, plunksnų dėžutėje — grosas, t. y. 144 plunksnos.

[2] P ė d a lygi 30,479 *cm*.

Dvyliktainės sistemos pranašumai dar labiau išryškėja, prisiminus tai, kad dvyliktainėje sistemoje skaičius, besibaigiantis nuliu, yra kartotinis ir 2, ir 3, ir 4, ir 6. Pagalvokite, kaip patogu skaidyti skaičių, kai jo ir $^1/_2$, ir $^1/_3$, ir $^1/_4$, ir $^1/_6$ turi būti sveiki skaičiai! O jeigu dvyliktainėje sistemoje parašytas skaičius baigiasi d v i e m nuliais, tai jis



Babilonietiškas skaičiavimas tuzinais išliko iki šių dienų laiko skaičiavime, apskritimo dalijime, spaustuviniuose matuose.

dalijasi be liekanos iš 144, o vadinasi, ir iš visų skaičiaus 144 daliklių, t. y. iš šios ilgos eilės skaičių:

2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 16, 18, 24, 36, 48, 72, 144.

Keturiolika daliklių — vietoje tų aštuonių, kuriuos turi besibaigią dviem nuliais skaičiai, parašyti dešimtainėje sistemoje (2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100). Mūsų sistemoje tiktai trupmenos $^1/_2$, $^1/_4$, $^1/_5$, $^1/_{20}$ ir t. t. gali būti paverstos baigtinėmis dešimtainėmis; o dvyliktainėje sistemoje galima parašyti be vardiklio žymiai daugiau trupmenų, ir visų pirma: $^1/_2$, $^1/_3$, $^1/_4$, $^1/_6$, $^1/_8$, $^1/_9$, $^1/_{12}$, $^1/_{16}$, $^1/_{18}$, $^1/_{24}$, $^1/_{36}$, $^1/_{48}$, $^1/_{72}$, $^1/_{144}$, kurios atitinkamai bus atvaizduotos šitaip:

0,6; 0,4; 0,3; 0,2; 0,16; 0,14; 0,1; 0,09; 0,08; 0,06; 0,04; 0,03; 0,02; 0,01.

Beje, labai klystų tas, kas manytų, kad skaičiaus dalumas gali priklausyti nuo skaičiavimo sistemos, kurioje skaičius atvaizduotas. Jeigu duotame maiše esančius riešutus galima suskirstyti į penkias vienodas krūveles, tai, aišku, ši jų savybė nepasikeis nuo to, ar mūsų riešutų skaičius išreikštas vienoje ar kitoje skaičiavimo sistemoje, ar atidėtas ant skaitytuvų, ar parašytas žodžiu, ar pagaliau atvaizduotas kokiu nors kitu būdu. Jeigu dvyliktainėje sistemoje parašytas skaičius dalijasi iš 6 arba iš 72, tai, pervedus jį į kitokią, pavyzdžiui dešimtainę, skaičiavimo sistemą, jo dalikliai lieka tie patys. Skirtumas bus tiktai tas, kad dvyliktainėje sistemoje skaičiaus dalumą iš 6 arba iš 72 lengviau nustatyti (skaičius baigiasi vienu arba dviem nuliais). Kai kalbama apie dvyliktainės sistemos pranašumą dalumo iš daugelio daliklių prasme, turima galvoje tai, kad dėl mūsų palinkimo apvalinti skaičius praktikoje dažniau pasitaikys skaičių, kurie dvyliktainėje sistemoje baigiasi nuliais.

Esant tokiems dvyliktainės sistemos pranašumams, nenuostabu, kad kai kurie matematikai siūlė visiškai pereiti į šią sistemą. Tačiau mes jau perdaug glaudžiai susigyvenome su dešimtaine sistema, kad ryžtumėmės tokiai reformai.

Didysis prancūzų matematikas Laplasas dar prieš 100 metų taip pasisakė šiuo klausimu: „Mūsų numeracijos sistemos pagrindas nesidalija iš 3 ir iš 4, t. y. iš dviejų daliklių, labai naudotinų dėl jų paprastumo. Dviejų naujų ženklų (skaitmenų) prijungimas duotų skaičiavimo sistemai tą pranašumą, tačiau tokia naujovė būtų be abejonės atmesta. Mes netektume patogumo, pagimdžiusio mūsų aritmetiką — būtent, galimybės skaičiuoti rankų pirštais“.

Priešingai, dėl vienodumo vertėtų pereiti ir lankų matavime nuo dabar naudojamų laipsnių ir minučių prie naujų, dešimtainių vienetų.

Tokią reformą buvo mėginta padaryti Prancūzijoje, bet ji neprigijo. Ne kas kitas, kaip minėtas Laplasas, buvo karštas šios reformos šalininkas. Savo garsioje knygoje „Pasaulio sistemos išdėstymas“ jis nuosekliai grindžia dešimtainį kampų dalijimą: laipsniu jis vadina ne 90-ją, o 100-ją stataus kampo dalį, minute — 100-ją laipsnio dalį ir t. t. Laplasas siūlė net dešimtainį valandų ir minučių dalijimą. Jis rašė: „Matų sistemos vienodumas reikalauja, kad diena būtų padalyta į 100 valandų, valanda į 100 minučių ir minutė į 100 sekundžių“.

Dešimtainė skaičiavimo sistema atsirado iš skaičiavimo pirštais. Romėnų skaitmuo V primena ranką su atkištu nykščiu.

Tokiu būdu, matote, kad tuzino istorija gan ilga ir kad skaičius 12 ne be pagrindo atsidūrė skaitinių keistenybių galerijoje. Užtat jo kaimynas — „velnio tuzinas“, 13, čia figūruoja ne todėl, kad jis kuo nors ypatingas, bet greičiau kaip tik dėl to, kad jame nėra nieko ypatingo, nors jam ir priskiriama tokia niūri šlovė: argi iš tikrųjų nenuostabu, kad niekuo neišsiskiriantis skaičius galėjo tapti toks „baisus“ prietaringiems žmonėms?

Kaip plačiai šis prietaras buvo paplitęs (jis atsirado senovės Babilonijoje), matyti iš to, kad caro vyriausybė, įrengdama Peterburge elektrinį tramvajų, ilgą laiką nesiryžo įvesti maršruto Nr. 13 ir praleido jį, pereidama tiesiog į Nr. 14: valdžia manė, kad keleiviai bijos važinėti vagonuose su tokiu „pražūtingu“ numeriu. Įdomu ir tai, kad Peterburge buvo nemaža namų, kuriuose 13-tas buto numeris buvo praleistas... Viešbutyje taip pat neretai nebūdavo kambario Nr. 13, jį pakeisdavo Nr. 12a. Kovai su šiuo niekuo nepagrįstu skaitiniu prietaru kai kuriose Vakarų valstybėse (pavyzdžiui Anglijoje) buvo steigiami net specialūs „skaičiaus 13 klubai“...

Sekančioje aritmetinės kunstkameros vitrinoje matyti

SKAIČIUS 365

Jis yra ypatingas visų pirma tuo, kad išreiškia dienų skaičių metuose. Toliau, jį dalijant iš 7, gaunama liekana 1; ši, atrodytų, neesminė skaičiaus 365 ypatybė labai svarbi mūsų septyniadieniam kalendoriui.

Kita skaičiaus 365 ypatybė nėra susijusi su kalendoriumi:

$$365 = 10 \times 10 + 11 \times 11 + 12 \times 12,$$

t. y. 365 yra lygus trijų iš eilės einančių skaičių, pradedant nuo 10, kvadratų sumai:

$$10^2 + 11^2 + 12^2 = 100 + 121 + 144 = 365.$$

Bet ir tai dar ne viskas — tam pačiam lygi dviejų sekančių skaičių, 13 ir 14, kvadratų suma:

$$13^2 + 14^2 = 169 + 196 = 365.$$

Šia skaičiaus 365 savybe pagrįstas S. A. Račinskio uždavinys, atvaizduotas garsiame Bogdanovo-Belskio paveiksle „Sunkus uždavinys“:

$$\frac{10^2 + 11^2 + 12^2 + 13^2 + 14^2}{365}.$$

Šitokių skaičių nedaug tėra mūsų aritmetinių keistenybių galerijoje.

TRYS DEVYNIUKĖS

Sekančioje vitrinoje išstatytas didžiausias triženklis skaičius: 999.

Įdomi skaičiaus 999 savybė išryškėja dauginant iš jo bet kurį kitą triženklį skaičių. Gaunama šešiaženklė sandauga, kurios pirmieji trys skaitmenys yra dauginamasis skaičius, sumažintas vienetu, o kiti trys skaitmenys — pirmųjų „papildiniai“ iki 9. Pavyzdžiui:

$$573 \times 999 = \underset{\overline{999}}{\overset{572}{572\,427}}$$

Gana pažvelgti į sekančią eilutę, ir mes suprasime šios ypatybės kilmę:

$$573 \times 999 = 573 \times (1000 - 1) = \left|\begin{array}{r} 573\,000 \\ -573 \\ \hline 572\,427 \end{array}\right.$$

Žinodami šią ypatybę, galime kiekvieną triženklį skaičių „akimirka“ padauginti iš 999.

$947 \times 999 = 946\,053,$

$509 \times 999 = 508\,491,$

$981 \times 999 = 980\,019$ ir t. t.

O kadangi $999 = 9 \times 111 = 3 \times 3 \times 3 \times 37$, tai jūs galite, taip pat žaibišku greitumu, rašyti ištisas kolonas šešiaženklių skaičių, kartotinių 37; kas nežino skaičiaus 999 savybių, aišku, negalės to padaryti. Trumpiau sakant, jūs galite nenusimanantiems rengti mažus „akimirksninės daugybos ir dalybos“ seansus.

ŠECHEREZADĖS SKAIČIUS

Sekantis iš eilės pas mus 1001 — išgarsintas Šecherezadės skaičius. Jūs, tikriausiai, ir neįtarėte, kad pačiame stebuklingųjų arabų pasakų rinkinio pavadinime yra savotiškas stebuklas, kuris galėtų pasakų sultono vaizduotę pavergti ne mažiau, kaip kiti Rytų stebuklai, jeigu tiktai jis būtų bent kiek susivokęs tarp aritmetinių keistenybių.

Kuo gi įžymus skaičius 1001? Iš pažiūros jis atrodo visai paprastas. Jis net nepriklauso vadinamųjų „pirminių“ skaičių rinktinei kategorijai. Jis dalijasi be liekanos ir iš 7, ir iš 11, ir iš 13 — iš trijų pirminių skaičių, kurių sandauga jis ir yra. Bet keistenybė ne ta, kad skaičius $1001 = 7 \times 11 \times 13$, — čia dar nėra nieko stebuklingo. Nuostabu yra tai, kad, padauginus iš jo triženklį skaičių, gaunamas rezultatas, kurį sudaro du kartus parašytas dauginamasis skaičius, pavyzdžiui:

$873 \times 1001 = 873\,873,$

$207 \times 1001 = 207\,207$ ir t. t.

Ir nors to ir reikėjo laukti, nes $873 \times 1001 = 873 \times 1000 + 873 = 873\,000 + 873$, — vis dėlto, naudojant nurodytą „Šecherezadės skaičiaus" savybę, galima gauti visiškai nelauktus rezultatus, atrodančius stebuklingais, — bent jau nepasiruošusiam žmogui.

Tuoj paaiškinsime, kas čia yra.

Nežinančius aritmetinių paslapčių draugus jūs galite apstulbinti tokiu pokštu. Tegul kas nors parašo ant popierėlio slaptai nuo jūsų kokį nori triženklį skaičių, o po to tegul prie jo prirašo tą patį skaičių dar kartą. Gausis šešiaženklis skaičius. Tam pačiam draugui arba jo kaimynui pasiūlykite padalyti, slepiant nuo jūsų, šį skaičių iš 7; jūs iš anksto išpranašaujate, kad skaičius pasidalys be liekanos. Rezultatas perduodamas kitam draugui, kuris jūsų pasiūlymu dalija jį iš 11; ir nors dalijamojo skaičiaus nežinote, jūs vis dėlto drąsiai tvirtinate, kad ir jis pasidalys be liekanos. Gautą rezultatą jūs nukreipiate dar kitam draugui, kurį prašote padalyti šį skaičių iš 13; vėl iš anksto įspėjate, kad dalyba bus be liekanos. Trečiosios dalybos rezultatą, nepažvelgę į gautą skaičių, įteikiate pirmajam draugui, sakydami:

— Štai tavo sugalvotasis skaičius!

— Taip ir yra: tu įspėjai.

Kame šito pokšto paslaptis?

Šis gražus aritmetinis pokštas, kuris nenusimanantiems daro stebukladarystės įspūdį, paaiškinamas labai paprastai: atsiminkite, kad prirašyti prie triženklio skaičiaus jį patį — reiškia padauginti jį iš 1001, t. y. iš sandaugos $7 \times 11 \times 13$. Šešiaženklis skaičius, kurį jūsų draugas gauna, prirašęs prie sugalvoto skaičiaus jį patį, turi dalytis be liekanos ir iš 7, ir iš 11, ir iš 13; paeiliui padalijus tą šešiaženklį skaičių iš šitų trijų skaičių (t. y. iš jų sandaugos — 1001), aišku, vėl turi būti gautas sugalvotasis skaičius.

SKAIČIUS 10 101

Po to, kas pasakyta apie skaičių 1001, jau nebus netikėta pamatyti mūsų galerijos vitrinose skaičių 10 101. Jūs nujaučiate, kokia būtent savybė suteikė šiam skaičiui tokią garbę. Jis, kaip ir skaičius 1001, duoda nuostabų rezultatą dauginant, bet ne iš triženklių, o iš *dviženklių* skaičių; kiekvienas dviženklis skaičius, padaugintas iš 10101, yra lygus pačiam sau, parašytam *triskart*. Pavyzdžiui:

$$73 \times 10\,101 = 737\,373,$$
$$21 \times 10\,101 = 212\,121.$$

Priežastis paaiškėja iš tokios eilutės:

$$73 \times 10\,101 = 73 \times (10\,000 + 100 + 1) = \left|\begin{array}{r} 730\,000 \\ +7\,300 \\ 73 \\ \hline 737\,373 \end{array}\right.$$

Ar galima šito skaičiaus pagalba daryti nepaprasto atspėjimo pokštus, kaip su skaičiaus 1001 pagalba?

Taip, galima. Šiuo atveju galima net įvairiau apipavidalinti pokštą, atmenant tai, kad 10 101 yra keturių skaičių sandauga:

$$10\,101 = 3 \times 7 \times 13 \times 37.$$

Vienam draugui pasiūlę sugalvoti kokį nors *dviženklį* skaičių, jūs pasiūlote antram prirašyti prie jo tą patį skaičių, trečiam — prirašyti tą patį skaičių dar kartą. Ketvirtąjį jūs prašote padalyti gautą šešiaženklį skaičių, pavyzdžiui, iš 7; penktasis draugas turi gautąjį dalmenį padalyti iš 3; šeštasis padalija tai, kas gauta, iš 37, ir pagaliau septintasis padalija šį rezultatą iš 13. Visos keturios dalybos yra be liekanų. Paskutinės dalybos rezultatą jūs prašote perduoti pirmajam draugui: tai ir yra jo sugalvotasis skaičius.

Kartodami pokštą, galite jį kiek paįvairinti, pasiūlydami kiekvieną kartą naujus daliklius. Būtent, vietoje keturių daugiklių $3 \times 7 \times 13 \times 37$ galite imti šias trijų daugiklių grupes: $21 \times 13 \times 37$; $7 \times 39 \times 37$; $3 \times 91 \times 37$; $7 \times 13 \times 111$.

Šis skaičius — 10 101, — gal būt, net nuostabesnis už stebuklingąjį Šecherezadės skaičių, nors ir mažiau žinomas savo nepaprastomis savybėmis. Apie jį buvo rašoma, beje, jau prieš du šimtus metų Magnickio „Aritmetikoje", skyriuje, kur duodami „šiek tiek stebinančios" daugybos pavyzdžiai. Juo labiau turime jį įtraukti į mūsų aritmetinių keistenybių rinkinį.

SKAIČIUS 10 001

Su šiuo skaičiumi jūs taip pat galite daryti pokštus, panašius į aukščiau minėtus, nors efektas, gal būt, bus mažesnis. Mat, jis yra tiktai dviejų pirminių skaičių sandauga:

$$10\,001 = 73 \times 137.$$

Kaip panaudoti jį „stebinantiems" aritmetiniams veiksmams, skaitytojas, tikiuosi, po viso to, kas pasakota aukščiau, suvoks pats.

ŠEŠI VIENETAI

Sekančioje vitrinoje matome naują aritmetinės kunstkameros keistenybę — skaičių, susidedantį iš šešių vienetų. Žinodami stebuklingas skaičiaus 1001 savybes, mes tuojau suvokiame, kad

$$111\,111 = 111 \times 1001.$$

Bet $111 = 3 \times 37$, o $1001 = 7 \times 11 \times 13$. Reiškia, naujasis mūsų skaitinis fenomenas [1], susidedantis vien iš vienetų, yra penkių pirminių skaičių sandauga, o jungdami įvairiais būdais šiuos penkis daugiklius į dvi grupes, gauname 15 porų daugiklių, kurių sandauga lygi tam pačiam skaičiui — 111 111:

[1] Fenomenas — retas reiškinys, peržengiantis įprastines arba normines ribas.

$$3 \times (7 \times 11 \times 13 \times 37) = 3 \times 37\,037 = 111\,111$$
$$7 \times (3 \times 11 \times 13 \times 37) = 7 \times 15\,873 = 111\,111$$
$$11 \times (3 \times 7 \times 13 \times 37) = 11 \times 10\,101 = 111\,111$$
$$13 \times (3 \times 7 \times 11 \times 37) = 13 \times 8\,547 = 111\,111$$
$$37 \times (3 \times 7 \times 11 \times 13) = 37 \times 3\,003 = 111\,111$$
$$(3 \times 7) \times (11 \times 13 \times 37) = 21 \times 5\,291 = 111\,111$$
$$(3 \times 11) \times (7 \times 13 \times 37) = 33 \times 3\,367 = 111\,111 \text{ ir t. t.}$$

Reiškia, jūs galite penkiolikai draugų duoti dauginti, ir nors kiekvienas daugins kitą skaičių porą, visi gaus vieną ir tą patį originalų rezultatą: 111 111.

Tas pats skaičius, 111 111, gali būti panaudotas ir sugalvotiems skaičiams įspėti, panašiai kaip tai buvo daroma skaičių 1001 ir 10 101 pagalba. Šiuo atveju reikia pasiulyti sugalvoti vienaženklį skaičių, t. y. vieną skaitmenį, ir pakartoti jį 6 kartus. Dalikliai čia gali būti penki pirminiai skaičiai: 3, 7, 11, 13 ir 37, o taip pat iš jų gauti sudėtiniai skaičiai: 21, 33, 39 ir t. t. Tai leidžia pokštą labai įvairinti. Skaitytojas pats pagalvos, kaip elgtis tokiais atvejais.

Skaičiaus 111 111 pavyzdys rodo, kaip puikiai galima panaudoti aritmetiniams pokštams skaičių, susidedantį tiktai iš vienetų, jeigu jis susiskaido į daugiklius. Panašių pokštų mėgėjų laimei, daugelis tokios formos skaičių yra sudėtiniai, o ne paprasti.

Iš pirmųjų 17 tokios rūšies skaičių tiktai du mažiausieji — 1 ir 11 — yra pirminiai, o visi kiti — sudėtiniai. Štai kaip susiskaido į pirminius daugiklius pirmieji dešimt šios formos sudėtinių skaičių:

$$111 = 3 \times 37$$
$$1\,111 = 11 \times 101$$
$$11\,111 = 41 \times 271$$
$$111\,111 = 3 \times 7 \times 11 \times 13 \times 37$$
$$1\,111\,111 = 239 \times 4649$$
$$11\,111\,111 = 11 \times 73 \times 101 \times 137$$
$$111\,111\,111 = 9 \times 37 \times 333\,667$$
$$1\,111\,111\,111 = 11 \times 41 \times 271 \times 9091$$
$$11\,111\,111\,111 = 21\,649 \times 513\,239$$
$$111\,111\,111\,111 = 3 \times 7 \times 11 \times 13 \times 37 \times 101 \times 9901$$

Ne visus čia duotus skaičius patogu panaudoti atspėjimams; kai kuriais atvejais pokštą atlikti atspėjančiajam būtų perdaug sunku. Tačiau skaičiai iš 3, iš 4, iš 5, iš 6, iš 8, iš 9, iš 12 vienetų yra daugiau ar mažiau tinkami šiam tikslui. Jų panaudojimo skaičiams atspėti pavyzdžiai duoti sekančio skyriaus pabaigoje.

SKAIČIŲ PIRAMIDĖS

Sekančiose galerijos vitrinose mus nustebina visai ypatingos rūšies skaičių įžymybės — skaičių deriniai, panašūs į piramides. Apžiūrėsime iš arčiau pirmąją iš jų:

$$\begin{array}{r}
1\times9+2=11\\
12\times9+3=111\\
123\times9+4=1111\\
1234\times9+5=11111\\
12345\times9+6=111111\\
123456\times9+7=1111111\\
1234567\times9+8=11111111\\
12345678\times9+9=111111111
\end{array}$$

Kaip paaiškinti šiuos savotiškus daugybos rezultatus? Norėdami perprasti šį keistą dėsningumą, paimsime pavyzdžiu kurią nors iš vidurinių mūsų skaičių piramidės eilučių: $123\,456\times9+7$. Užuot padauginę iš 9, galime padauginti iš (10—1), t. y. prirašyti 0 ir atimti dauginamąjį:

$$123\,456\times9+7=1\,234\,560+7-123\,456=\left|\begin{array}{r}1\,234\,567\\-\quad123\,456\\\hline 1\,111\,111\end{array}\right.$$

Pažvelgę į pastarąją atimtį, suprantame, kodėl čia gaunamas rezultatas, susidedantis tiktai iš vienetų.

Tai išsiaiškinti galime remdamiesi ir kitokiais samprotavimais. Kad 12 345. . . pavidalo skaičius pavirstų 11 111. . . pavidalo skaičiumi, reikia iš antro jo skaitmens atimti 1, iš trečio — 2, iš ketvirto — 3, iš penkto — 4 ir t. t. — kitaip tariant, atimti iš jo tą patį 12 345. . . pavidalo skaičių, dešiml kartų sumažintą ir netekusį prieš tai paskutinio skaitmens. Dabar suprantama, kad gauti ieškomam rezultatui reikia mūsų skaičių padauginti iš 10, pridėti prie jo sekantį po paskutinio skaitmens skaitmenį ir atimti iš rezultato pradinį skaičių (o padauginti iš 10 ir atimti dauginamąjį — reiškia padauginti iš 9).

Panašiai paaiškinamas susidarymas ir kitos skaičių piramidės, kuri gaunama dauginant tam tikrą skaitmenų eilutę iš 8 ir pridedant nuosekliai didėjančius skaitmenis:

$$
\begin{aligned}
1 \times 8 + 1 &= 9 \\
12 \times 8 + 2 &= 98 \\
123 \times 8 + 3 &= 987 \\
1234 \times 8 + 4 &= 9876 \\
12345 \times 8 + 5 &= 98765 \\
123456 \times 8 + 6 &= 987654 \\
1234567 \times 8 + 7 &= 9876543 \\
12345678 \times 8 + 8 &= 98765432 \\
123456789 \times 8 + 9 &= 987654321
\end{aligned}
$$

Ypač įdomi piramidėje paskutinė eilutė, kurioje, padauginus iš 8 ir pridėjus 9, natūrali skaičių eilutė virsta tokia pat eilute, tiktai su atvirkščia skaitmenų išsidėstymo tvarka. Paaiškinsime šią ypatybę.

Keistų rezultatų gavimas paaiškėja iš šios eilutės:

$$12\,345 \times 8 + 5 = \left\{ - \begin{matrix} 12\,345 \times 9 + 6 \\ 12\,345 \times 1 + 1 \end{matrix} \right\} = \left\{ - \begin{matrix} 111\,111^{*} \\ 12\,346, \end{matrix} \right.$$

t. y. $12\,345 \times 8 + 5 = 111\,111 - 12\,346$. Tačiau, kai iš skaičiaus 111 111 atimame skaičių 12 346, susidedantį iš didėjančių skaitmenų eilutės, mes, kaip lengva suprasti, turime gauti mažėjančių skaitmenų eilutę: 98 765.

Štai pagaliau trečia skaičių piramidė, kurią taip pat reikia paaiškinti:

---

* Kodėl $12\,345 \times 9 + 6$ duoda būtent 111 111, buvo parodyta nagrinėjant praeitą skaičių piramidę.

$$
\begin{gathered}
9 \times 9 + 7 = 88 \\
98 \times 9 + 6 = 888 \\
987 \times 9 + 5 = 8888 \\
9876 \times 9 + 4 = 88888 \\
98765 \times 9 + 3 = 888888 \\
987654 \times 9 + 2 = 8888888 \\
9876543 \times 9 + 1 = 88888888 \\
98765432 \times 9 + 0 = 888888888
\end{gathered}
$$

Šita piramidė yra tiesioginis pirmųjų dviejų rezultatas. Nustatyti tarp jų ryšį labai lengva. Iš pirmosios piramidės jau žinome, kad, pavyzdžiui:

$$12\,345 \times 9 + 6 = 111\,111.$$

Abi puses padauginę iš 8, gauname:

$$(12\,345 \times 8 \times 9) + (6 \times 8) = 888\,888.$$

O iš antros piramidės mums žinoma, kad

$$12\,345 \times 8 + 5 = 98\,765, \text{ arba } 12\,345 \times 8 = 98\,760.$$

Reiškia:

$$888\,888 = (12\,345 \times 8 \times 9) + (6 \times 8) = (98\,760 \times 9) + 48 =$$
$$= (98\,760 \times 9) + (5 \times 9) + 3 = (98\,760 + 5) \times 9 + 3 = 98\,765 \times 9 + 3.$$

Jūs įsitikinote, kad visos šios skaičių piramidės nėra tokios mįslingos, kaip atrodo iš pirmo požiūrio.

DEVYNI VIENODI SKAITMENYS

Pirmosios iš tik ką išnagrinėtų piramidžių (žr. 76 psl.) paskutinė eilutė

$$12\,345\,678 \times 9 + 9 = 111\,111\,111$$

yra pavyzdys ištisos grupės įdomių aritmetinių kuriozų, surinktų mūsų muziejuje į šią lentelę:

$$
\begin{gathered}
12345679 \times 9 = 111111111 \\
12345679 \times 18 = 222222222 \\
12345679 \times 27 = 333333333 \\
12345679 \times 36 = 444444444 \\
12345679 \times 45 = 555555555 \\
12345679 \times 54 = 666666666 \\
12345679 \times 63 = 777777777 \\
12345679 \times 72 = 888888888 \\
12345679 \times 81 = 999999999
\end{gathered}
$$

Iš kur toks rezultatų dėsningumas?

Atsižvelgiame į tai, kad

$$12\,345\,678 \times 9 + 9 = (12\,345\,678 + 1) \times 9 = 12\,345\,679 \times 9.$$

Dėl to $$12\,345\,679 \times 9 = 111\,111\,111.$$

O iš čia tiesiog gaunama, kad

$$12\,345\,679 \times 9 \times 2 = 222\,222\,222,$$
$$12\,345\,679 \times 9 \times 3 = 333\,333\,333,$$
$$12\,345\,679 \times 9 \times 4 = 444\,444\,444 \text{ ir t. t.}$$

SKAITMENINIAI LAIPTAI

Įdomu, ką gausime, skaičių 111 111 111, kurį ką tik naudojome, padauginę patį iš savęs? Galima spėti iš anksto, kad rezultatas bus keistokas, bet būtent koks?

Jeigu jūs galite tiksliai įsivaizduoti mintinai skaičių eilutes, tai ir be daugybos popieriuje greitai gausite mums rūpimą rezultatą. Iš tikrųjų, čia tereikia atitinkamai išdėstyti dalines sandaugas, nes dauginti visą laiką tenka tik vienetą iš vieneto — veiksmas, kuris gali būti sunkus nebent tik Fonvizino Mitrofanuškai, kuris svarstė kam lygu „vienąkart vienas“. O dalinių sandaugų sudėtis čia yra paprastas vienetų suskaičiavimas [1]. Štai šios vienintelės tokios rūšies daugybos rezultatas (atliekant daugybą nė karto netenka dauginti):

```
        111111111
        111111111
        ---------
        111111111
       111111111
      111111111
     111111111
    111111111
   111111111
  111111111
 111111111
111111111
-----------------
12345678987654321
```

[1] Dvejetainėje skaičiavimo sistemoje, kaip jau aiškinome, visa daugyba yra kaip tik tokios rūšies. Šis pavyzdys dar kartą pabrėžia dvejetainės sistemos pranašumus.

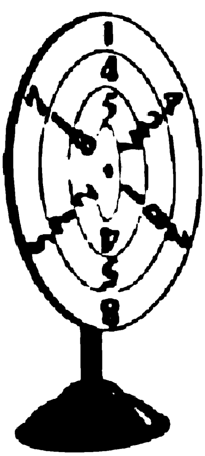
Visi rezultato skaitmenys nuo vidurio į abi puses simetriškai mažėja.

Jeigu kuriam nors iš skaitytojų įgriso skaitinių keistenybių apžvalga, jis gali čia palikti galeriją ir pereiti į sekančius skyrius, kur demonstruojami pokštai ir išstatyti skaitiniai milžinai ir nykštukai; aš noriu pasakyti: jie gali nebeskaityti toliau šio skyriaus, o pereiti prie kitų. Bet kas nori susipažinti dar su keliomis skaičių pasaulio įžymybėmis, kviečiu pažiūrėti su manimi eilę artimiausių vitrinų.

MAGIŠKIEJI ŽIEDAI

Kas per keisti žiedai demonstruojami šioje mūsų galerijos vitrinoje? Prieš mus trejetas plokščių žiedų, besisukančių vienas kitame.

Ant kiekvieno žiedo ta pačia tvarka užrašyti šeši skaitmenys, būtent — pažymėtas skaičius 142 857. Žiedai turi šią nuostabią savybę: kaip juos bepasuksime, sudėję du užrašytus ant jų skaičius, skaitydami nuo bet kurio skaitmens pagal laikrodžio rodyklę, visada gausime tą patį šešiaženklį skaičių (jeigu tiktai rezultatas iš viso bus šešiaženklis), tiktai truputį pastumtą! Pavyzdžiui, toje padėtyje, kuri atvaizduota brėžinyje, sudėję du išorinius žiedus, gauname:



Pasukamieji skaičių žiedai.

$$\begin{array}{r} 142\,857 \\ +\;428\,571 \\ \hline 571\,428 \end{array}$$

t. y. vėl tą pačią skaitmenų eilutę: 142 857, tiktai skaitmenys 5 ir 7 iš pabaigos persikėlė į pradžią.

Kitaip išsidėsčius žiedams vienas kito atžvilgiu, gauname tokius rezultatus:

$$\begin{array}{r} 285\,714 \\ +\;571\,428 \\ \hline 857\,142 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 714\,285 \\ +\;142\,857 \\ \hline 857\,142 \end{array} \text{ ir pan.}$$

Yra vienas išimtinis atvejis, kai rezultatas gaunamas 999 999:

$$\begin{array}{r} 285\,714 \\ +\ 714\,285 \\ \hline 999\,999 \end{array}$$

(Kitų nukrypimų nuo minėtos taisyklės priežastį skaitytojas supras, kai perskaitys šitą straipsnį iki galo.)

Maža to. Tą pačią skaitmenų eilutę, kur skaitmenys išsidėstę ta pačia eile, gausime ir a t i m d a m i skaičius, užrašytus ant žiedų.

$$\begin{array}{r} 428\,571 \\ -\ 142\,857 \\ \hline 285\,714 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 571\,428 \\ -\ 285\,714 \\ \hline 285\,714 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 714\,285 \\ -\ 142\,857 \\ \hline 571\,428 \end{array}$$

Išimtinis atvejis bus tada, kai sutapdinami vienodi skaitmenys; tada, aišku, skirtumas lygus nuliui.

Bet ir tai dar ne viskas. P a d a u g i n k i t e skaičių 142 857 iš 2, iš 3, iš 4, iš 5 arba iš 6 — ir vėl gausite tą patį skaičių, tiktai apskritimine tvarka pastumtą per vieną arba kelis skaitmenis:

$$142\,857 \times 2 = 285\,714,$$
$$142\,857 \times 3 = 428\,571,$$
$$142\,857 \times 4 = 571\,428,$$
$$142\,857 \times 5 = 714\,285,$$
$$142\,857 \times 6 = 857\,142.$$

Kas gi sąlygoja visas paslaptingąsias mūsų skaičiaus savybes?

Mes rasime kelią į atspėjimą, jei truputį prailginsime pastarąją lentelę ir pamėginsime padauginti mūsų skaičių iš 7: gausime 999 999. Reiškia, skaičius 142 857 yra ne kas kita, kaip skaičiaus 999 999 septintoji dalis; t. y. trupmena $\frac{142\,857}{999\,999} = \frac{1}{7}$. Iš tiesų, jei imsite versti $^1/_7$ dešimtaine trupmena, gausite:

$1 : 7 = 0{,}142857\ldots$, t. y. $^1/_7 = 0{,}(142857)$

```
10
 30
  20
   60
    40
     50
      1
```

Mūsų paslaptingas skaičius yra begalinės periodinės trupmenos, gaunamos $^1/_7$ pavertus dešimtaine trupmena, periodas. Dabar paaiškėja, kodėl, šį skaičių padvigubinus, patrigubinus ir t. t., tiktai viena skaičių grupė pereina į kitą vietą. Juk tas skaičius, padaugintas iš 2, pasidaro lygus $^2/_7$, o tai yra tas pats, kaip ir paversti dešimtaine trupmena ne $^1/_7$, bet $^2/_7$. O ėmę versti trupmeną $^2/_7$ dešimtaine, iš karto pastebėsite, kad skaitmuo 2 — viena iš tų liekanų, kurias mes jau buvome gavę versdami $^1/_7$; aišku, kad turės pasikartoti ir ankstesnė dalmens skaitmenų eilė, bet ji prasidės nuo kito skaitmens. Kitaip sakant, turime gauti tą patį periodą, tiktai keletas pirmųjų jo skaitmenų atsidurs gale. Visa tai pasikartos ir dauginant iš 3, iš 4, iš 5 ir iš 6, t. y. iš visų liekanose gaunamų skaičių. O daugindami iš 7, turime gauti vienetą, arba — tai yra tas pat — 0,9999...

Įdomūs s u d ė t i e s ir a t i m t i e s rezultatai, gaunami su skaičiais ant žiedų, paaiškinami tuo pačiu faktu, kad 142 857 yra trupmenos $^1/_7$ periodas. Iš tikrųjų: ką gi mes darome, pasukdami žiedą per keletą skaitmenų? Perstatome grupę skaitmenų iš eilutės pradžios į jos pabaigą, t. y. skaičių 142 857 padauginame iš 2, iš 3, iš 4 ir t. t. Vadinasi skaičių, užrašytų ant žiedų, visi sudėties arba atimties veiksmai suvedami į trupmenų $^1/_7$, $^2/_7$, $^3/_7$ ir t. t. sudėtį arba atimtį. Aišku, kad kiekvienu atveju kaip rezultatą turime gauti keletą septintųjų dalių, t. y. vėl mūsų skaitmenų eilutę 142 857, vienaip ar kitaip apskritimiškai (cikliškai) perstatytą. Čia reikia atmesti tiktai tuos atvejus, kai sudedami tokie septintųjų dalių skaičiai, kurie duoda sumą, lygią vienetui arba didesnę už 1.

Tačiau ir pastarieji atvejai ne pilnutinai atmetami: jie duoda rezultatą, nors ir ne tapatingą su nagrinėtais, bet vis dėlto panašų į juos. Atidžiau panagrinėsime, ką gausime padauginę mūsų paslaptingą skaičių iš daugiklio, didesnio už 7, t. y. iš 8, iš 9 ir t. t. Padauginti 142 857, pavyzdžiui, iš 8 galime taip: padauginti pirma iš 7 ir prie sandaugos (t. y. prie 999 999) pridėti mūsų skaičių:

$$142\,857 \times 8 = 142\,857 \times 7 + 142\,857 = 999\,999 + 142\,857 =$$
$$= 1\,000\,000 - 1 + 142\,857 = 1\,000\,000 + (142\,857 - 1).$$

Galutinis rezultatas — 1 142 856 — skiriasi nuo dauginamojo — 142 857 — tiktai tuo, kad pradžioje atsirado dar vienas vienetas, o paskutinis skaitmuo sumažėjo vienetu. Pagal panašią taisyklę parašomos 142 857 ir kiekvieno kito, didesnio už 7, skaičiaus sandaugos; tai lengva matyti iš šių eilučių:

$$142\,857 \times 8 = (142\,857 \times 7) + 142\,857 = 1\,142\,857,$$
$$142\,857 \times 9 = (142\,857 \times 7) + (142\,857 \times 2) = 1\,285\,713,$$
$$142\,857 \times 10 = (142\,857 \times 7) + (142\,857 \times 3) = 1\,428\,570,$$
$$142\,857 \times 16 = (142\,857 \times 7 \times 2) + (142\,857 \times 2) = 2\,285\,712,$$
$$142\,857 \times 39 = (142\,857 \times 7 \times 5) + (142\,857 \times 4) = 5\,571\,423.$$

Bendra taisyklė čia tokia: dauginant 142 857 iš bet kurio daugiklio, reikia padauginti tiktai iš liekanos, kuri gaunama padalijus daugiklį iš 7; šios sandaugos priekyje parašomas skaičius, parodantis, kiek septyniukių yra daugiklyje, ir tas pats skaičius atimamas iš rezultato[1]. Pavyzdžiui, norime padauginti 142 857 iš 88. Padaliję daugiklį 88 iš 7, dalmenyje gauname 12, o liekanoje — 4. Vadinasi, daugybos rezultatas yra toks:

$$12\,571\,428 - 12 = 12\,571\,416.$$

[1] Jeigu daugiklis yra kartotinis 7, tai rezultatas yra lygus skaičiui 999 999, padaugintam iš daugiklio septyniukių skaičiaus; tokią daugybą lengva atlikti mintinai. Pavyzdžiui, $142\,857 \times 28 = 999\,999 \times 4 = 4\,000\,000 - 4 = 3\,999\,996$.

Padauginę 142 857 iš 365, gausime (kadangi padaliję 365 iš 7 dalmenyje gauname 52, o liekanoje 1):

$$52\,142\,857 - 52 = 52\,142\,805.$$

Įsisavinę šitą paprastą taisyklę ir atmintinai žinodami mūsų keisto skaičiaus daugybos iš 2, 3, 4, 5 ir 6 rezultatus (tai yra visai nesunku, reikia tiktai atsiminti, kuriuo skaitmeniu jie prasideda), jūs galite stebinti nenusimanančius žaibišku šešiaženklio skaičiaus dauginimu. O kad nepamirštumėte šio nuostabaus skaičiaus, priminsime, kad jis atsirado iš $^1/_7$, arba $^2/_{14}$; štai jums pirmieji trys minėto skaičiaus skaitmenys: 142. Kiti trys gaunami iš 999, atėmus pirmuosius tris:

$$\begin{array}{r} 999 \\ -\ 142 \\ \hline 857 \end{array}$$

Su tokiais skaičiais mes jau esame susidūrę — būtent, nagrinėdami skaičiaus 999 savybes. Prisiminę tai, kas jau ten kalbėta, iš karto suvoksime, kad skaičius 142 857 yra, aišku, dviejų skaičių — 143 ir 999 — sandauga:

$$142\,857 = 143 \times 999.$$

Bet $143 = 13 \times 11$. Prisiminę ankstesnes pastabas apie skaičių 1001, kuris lygus $7 \times 11 \times 13$, galėsime, neatlikdami veiksmų, išpranašauti, kas bus gauta padauginus 142 857 iš 7:

$$142\,857 \times 7 = 143 \times 999 \times 7 = 999 \times 11 \times 13 \times 7 =$$
$$= 999 \times 1001 = 999\,999$$

(visus šituos pertvarkymus, aišku, galime atlikti mintinai).

Skaičių, panašių į tą, su kuriuo susipažinome, yra daugybė. Jie sudaro lyg ir vieną šeimą, nes jų visų kilmė yra bendra — jie gaunami paprastąsias trupmenas verčiant begalinėmis dešimtainėmis. Tačiau ne kiekvienas dešimtainės trupmenos periodas turi aukščiau nagrinėtą įdomią savybę duoti dauginant ciklinį skaitmenų perstatymą. Nesileisdami į teorines detales, pažymėsime, kad minėtą savybę turi tiktai tos trupmenos, *kurių periodo skaitmenų skaičius yra vienetu mažesnis už atitinkamos paprastosios trupmenos vardiklį*. Pavyzdžiui:

$^1/_7$	periode yra	6	skaitmenys
$^1/_{17}$	„ „	16	„
$^1/_{19}$	„ „	18	„
$^1/_{23}$	„ „	22	„
$^1/_{29}$	„ „	28	„

Praktiškai pabandę, įsitikinsite, kad verčiant $^1/_{17}$, $^1/_{19}$, $^1/_{23}$ ir $^1/_{29}$ dešimtainėmis trupmenomis gaunami periodai turi tokias pat ypatybes, kaip ir mūsų išnagrinėtas trupmenos $^1/_7$ periodas.

Pavyzdžiui, iš $^1/_{29}$ gauname skaičių

$$0{,}344\,827\,586\,206\,896\,551\,724\,137\,931.$$

Jeigu mūsų nurodytoji taisyklė (apie periodo skaitmenų skaičių) yra neišlaikyta, tai atitinkamas periodas duoda skaičių, neįeinantį į minėtąją įdomių skaičių šeimą. Pavyzdžiui, $^1/_{13}$ duoda dešimtainę trupmeną su 6 skaitmenimis (o ne su 12) periode:

$$^1/_{13} = 0{,}076923.$$

Padauginę iš 2, gauname visiškai kitokį skaičių:

$$^2/_{13} = 0{,}153846.$$

Kodėl? Todėl, kad tarp dalybos 1 : 13 liekanų nebuvo skaičiaus 2. *Skirtingų* liekanų buvo tiek, kiek periode skaitmenų, t. y. 6; o skirtingų daugiklių, iš kurių galima dauginti $^1/_{13}$, yra 12; vadinasi, liekanose bus ne visi daugikliai, o tiktai 6. Lengva įsitikinti, kad šie daugikliai — 1, 3, 4, 9, 10, 12. Daugindami iš šitų 6 skaičių, gausime ciklinius perstatymus ($076923 \times 3 = 230769$), o daugindami iš kitų — ne. Štai kodėl iš $^{1}/_{13}$ gaunamas skaičius tik iš dalies tinka „magiškajam žiedui“. Tą pat galima pasakyti ir apie eilę kitų periodų.

ARITMETINIAI KURIOZAI

100	$24\,^{3}/_{6} + 75\,^{9}/_{18}$
	$47\,^{3}/_{6} + 52\,^{9}/_{18}$
	$74\,^{3}/_{6} + 25\,^{9}/_{18}$
	$95\,^{3}/_{7} + 4\,^{16}/_{28}$
	$98\,^{3}/_{6} + 1\,^{27}/_{54}$
	$94\,^{1}/_{2} + 5\,^{38}/_{76}$
	$1\,^{6}/_{7} + 3 + 95\,^{4}/_{28}$
	$57\,^{3}/_{6} + 42\,^{9}/_{18}$

Į kiekvieną sumą įeina tik devyni skirtingi skaitmenys.

ŠEŠTASIS SKYRIUS

POKŠTAI BE APGAULĖS

INDŲ SKAIČIUOTOJO MENAS

Aritmetiniai pokštai — sąžiningi, garbingi pokštai. Čia nesiekiama apgauti, nesistengiama užmigdyti žiūrovo dėmesį. Aritmetiniam pokštui atlikti nereikia nei stebukladariško rankų miklumo, nei nuostabaus judesių vikrumo, nei kokių nors kitų artistinių sugebėjimų, kurie kartais įgyjami tiktai per ilgametes pratybas.

Visa aritmetinio pokšto paslaptis yra skaičių įdomiųjų savybių kruopštus išstudijavimas ir panaudojimas, jų ypatybių geras žinojimas. Kas moka tokį pokštą įspėti, jam viskas paprasta ir aišku; o kas nežino aritmetikos, tam ir paprasčiausias veiksmas atrodo jau lyg kažkoks pokštas.

Buvo laikas, kada mokėjimas atlikti net paprastus aritmetinius veiksmus su dideliais skaičiais, ką dabar pažįsta kiekvienas mokinys, buvo tik nedaugelio žmonių menas, o kitiems atrodė kažkokiu antgamtišku sugebėjimu. Senovės indų pasakojime „Nalis ir Damajantė“ randame tokių pažiūrų į aritmetinius veiksmus atgarsį. Nalis, kuris mokėjo puikiai valdyti arklius, vežė vieną kartą skaičiuotoją-virtuozą Rituperną pro šalį išsikerojusio medžio — Vibitakos.

„Staiga jis pamatė tolumoj Vibitaką — tankia šakų
Paunksme apgaubtą medį. „Klausyk, Vaguka, — tarė jis:
— Čia žemėje nieks nėra visažinantis; mokėjime
Valdyti arklius tu pirmasis; užtat man teko mokėjimas
Skaičiuoti. . ."

Ir skaičiuotojas, norėdamas pademonstruoti savo meną, akimirka suskaičiavo šakotosios Vibitakos lapus. Apstulbęs Nalis prašo Rituperną atidengti jam savo meno paslaptį, ir pastarasis sutinka.

„. . .Vos tiktai
Ištarė savo žodį Ritupernas, kai Naliui atsivėrė
Akys, ir jis visas Vibitakos šakas, vaisius ir lapus
Galėjo iš karto suskaičiuoti. . ."

Galima suvokti, kad meno paslaptis buvo ta, kad betarpiškas lapų skaičiavimas, reikalaująs daug laiko ir kantrybės, buvo pakeistas suskaičiavimu tiktai vienos šakelės lapų ir to skaičiaus padauginimu iš kiekvienos šakos šakelių skaičiaus ir toliau — iš medžio šakų skaičiaus (laikant, kad ant kiekvienos šakos yra vienodas šakelių skaičius, o ant kiekvienos šakelės — vienodas lapų skaičius).

Daugelio aritmetinių pokštų įminimas yra toks pat paprastas, kaip ir Rituperno „pokšto" paslaptis. Vos tik sužinote pokšto paslaptį, ir jūs iš karto sugebate jį atlikti patys, panašiai kaip legendarinis Nalis iš karto išmoko nuostabaus greito skaičiavimo. Kiekvienas aritmetinis pokštas yra pagrįstas kokia nors įdomia skaičių ypatybe, ir todėl susipažinti su minėtais pokštais ne tik įdomu, bet ir pamokoma.

NEATIDARANT PINIGINIŲ

Pokštininkas paberia ant stalo krūvelę monetų, kurių suma trys rubliai, ir siūlo jums uždavinį: išdėstyti pinigus į devynias pinigines taip, kad būtų galima sumokėti bet kokią sumą iki trijų rublių, neatidarant piniginių.

Tai gali atrodyti visiškai neįvykdomu dalyku. Tačiau negalvokite, kad pokštininkas jums paruošė žodžių žaidimo ar nelaukto jų aiškinimo spąstus. Žiūrėkite: pats pokštininkas imasi darbo. Išskirstęs monetas po pinigines ir, pririšęs prie kiekvienos kortelę, nurodančią įdėtą sumą, jis siūlo jums pasakyti bet kokią sumą, ne didesnę kaip 3 rub.

Jūs sakote, pavyzdžiui, 2 rub. 69 kap.

Pokštininkas nedelsdamas atrenka keturias pinigines ir paduoda jums. Atidarote jas ir randate:

vienoje . .	—	rub.	64 kap.
vienoje .	—	„	45 „
trečioje	1	„	28 „
ketvirtoje	—	„	32 „
Iš viso . .	2	rub.	69 kap.

Jūs galite įtarti, kad pokštininkas vikriai pakeitė pinigines, ir pareikalauti pokštą pakartoti. Jis pristumia jums visas pinigines, ir kai jūs nurodote naują sumą — pavyzdžiui, 1 rub., arba 7 kap., arba 2 rub. 93 kap., — nedelsdamas parodo, kurias iš gulinčių piniginių reikia paimti, kad susidarytų jūsų nurodyta suma. Būtent:

1 rubliui — 6 piniginės (32 kap., 1 kap., 45 kap., 16 kap., 2 kap., 4 kap.).

7 kapeikoms — 3 piniginės (1 kap., 2 kap., 4 kap.).

2 rubliams 93 kapeikoms — 6 piniginės (128 kap., 32 kap., 8 kap., 45 kap., 64 kap., 16 kap.).

Pokštininko paliepimu, piniginės, pasirodo, yra visada pasirengusios sudaryti bet kurią nurodytą sumą (iki 3 rub.).

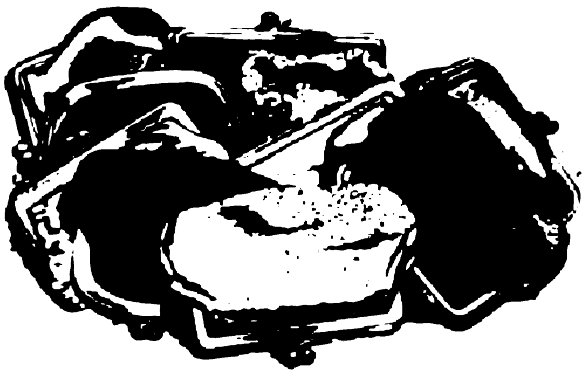
Kuo tai paaiškinti?

Paslaptis yra ta, kad monetos išdėliojamos tokiu būdu: 1 kap., 2 kap., 4 kap., 8 kap., 16 kap., 32 kap., 64 kap. ir 128 kap. ir pagaliau paskutinėje — visi likę pinigai, t. y.

$$300 - (1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128) = 300 - 255 = 45 \text{ kap.}$$

Lengva įsitikinti, kad iš pirmųjų 8 piniginių galima sudaryti bet kokią sumą nuo 1 iki 255 kap.; o jeigu reikalaujama suma yra didesnė kaip 255 kap., tai panaudojama paskutinė piniginė, kurioje yra 45 kap., o skirtumas sudaromas iš pirmųjų 8 piniginių.

Jūs galite patikrinti šitokio skaičių grupavimo tinkamumą daugelį kartų ir įsitikinti, kad iš jų tikrai galima sudaryti bet kurį skaičių, neviršijantį 300.



Pokštas su 9 piniginėmis.

Bet jus, tikriausiai, domina ir tai, kodėl skaičių 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64 ir t. t. eilutė turi tokią nuostabią savybę? Tai nesunku suprasti, jei prisiminsime, kad mūsų eilutės skaičiai yra dvejeto laipsniai: 2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5 ir t. t.[1], ir, vadinasi, juos galima laikyti dvejetainės skaičiavimo sistemos skyriais. O kadangi kiekvieną skaičių galima parašyti dvejetainėje sistemoje, tai, reiškia, ir *kiekvieną skaičių galima sudaryti iš dvejeto laipsnių sumos*, t. y. iš skaičių eilutės 1, 2, 4, 8, 16 ir t. t. Ir kai jūs atrenkate pinigines, norėdami sudaryti iš jų turinio reikiamą skaičių, jūs, iš esmės, išreiškiate duotąjį skaičių dve-

---

[1] Iš algebros yra žinoma, kad kiekvienas skaičius, pakeltas nuliniu laipsniu, yra lygus vienetui. Taip pat ir $2^0 = 1$.

jetainėje skaičiavimo sistemoje. Pavyzdžiui, lengva sudaryti skaičių 100, atvaizdavus jį dvejetainėje sistemoje:

100 | 2
0 | 50 | 2
0 | 25 | 2
1 | 12 | 2
0 | 6 | 2
0 | 3 | 2
1 | 1

100 = 1	1	0	0	1	0	0
64	33	(16)	(8)	4	(2)	(1)

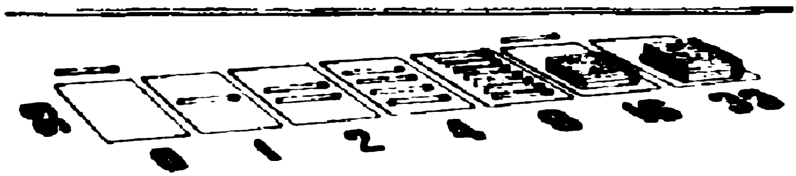
$100 = 64 + 32 + 4$

Primename, kad dvejetainėje sistemoje pirmoje vietoje iš dešinės yra vienetai, antroje — dvejetai, trečioje — ketvertai, ketvirtoje — aštuonetai ir t. t.

ĮSPĖTI DEGTUKŲ SKAIČIŲ

Dvejetainės sistemos savybe galima pasinaudoti ir šiam pokštui. Jūs pasiūlėte kam nors paimti nepilną dėžutę degtukų, padėti ant stalo, o greta padėti septynis popierinius kvadratėlius. Paskui paprašote jums pasišalinus atlikti šiuos veiksmus: palikus pusę degtukų dėžutėje, perkelti kitą pusę ant artimiausio popierėlio; jei degtukų skaičius nelyginis, atliekamą degtuką padėti šalia popierėlio, į kairę nuo jo. Ant popierėlio esančius degtukus (neliečiant šalia padėto degtuko) perskirti į dvi lygias dalis: vieną pusę įdėti į dėžutę, o kitą — perkelti ant sekančio popierėlio; jeigu degtukų skaičius nelyginis, atliekamą degtuką padėti šalia antrojo popierėlio. Toliau reikia elgtis tokiu pat būdu, grąžinant kiekvieną kartą pusę degtukų į dėžutę, o kitą pusę perkeliant ant sekančio popierėlio, nepamirštant vieną degtuką padėti šalia popierėlio, kai degtukų skaičius nelyginis.

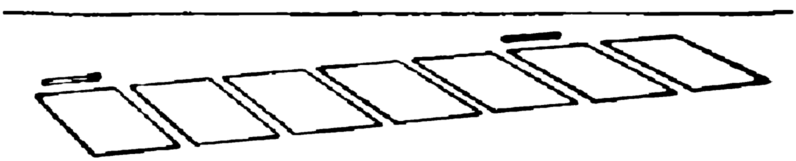
Galų gale visi degtukai, išskyrus atskirtuosius, gulinčius šalia popierėlių, sugrįš atgal į dėžutę (žr. piešinį).



Degtukų skaičiaus įspėjimas: nuoseklūs užmenančiojo veiksmai.

Kai visa tai padaryta, jūs grįžtate į kambarį ir, metęs žvilgsnį į tuščius popieriukus, pasakote degtukų skaičių paimtoje dėžutėje.

Kaip iš tuščių popierėlių ir atsitiktinių pavienių degtukų galima atspėti degtukų, buvusių iš pradžių dėžutėje, skaičių?



Pokšto tąsa: galutinis popieriukų vaizdas

Šiuo atveju tie tušti popierėliai pasako labai daug: iš jų ir iš atskirtųjų degtukų galime tiesiog perskaityti ieškomąjį skaičių, nes jis parašytas ant stalo — dvejetainėje skaičiavimo sistemoje. Paaiškinsime tai pavyzdžiu.

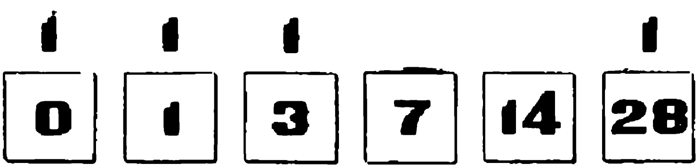
Tegul degtukų skaičius buvo 66. Iš eilės atliktos operacijos su jais ir galutinis popierėlių vaizdas duodami piešinių schemose.

Nesunku suvokti, kad operacijos su degtukais yra iš esmės tos pačios, kurias mes atliktume, norėdami dėžutėje esančių degtukų skaičių išreikšti dvejetainėje skaičiavimo sistemoje; o galutinė schema tiesiog atvaizduoja šį skaičių dvejetainėje skaičiavimo sistemoje, jeigu tušti popierėliai laikomi nuliais, o popierėliai, pažymėti iš šono degtuku, — vienetais. Skaitydami schemą iš kairės į dešinę, gauname:

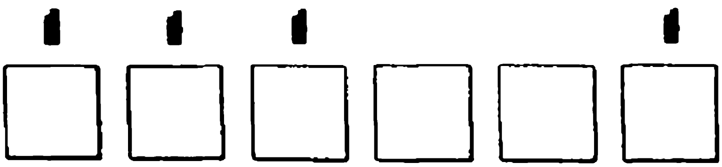
1	0	0	0	0	1	0
64	(32)	(16)	(8)	(4)	2	(1)

o dešimtainėje sistemoje: 64 + 2 = 66.

Jeigu būtų buvę 57 degtukai, — schemos būtų kitokios. Jos parodytos sekančiuose piešiniuose.



Įspėjimo atvejis, kai panaudojamas kitoks skaičius: pokšto pradžia.



Pokšto pabaiga.

Ieškomasis skaičius, parašytas dvejetainėje sistemoje:

1	1	1	0	0	1
32	16	8	(4)	(2)	1

o dešimtainėje sistemoje: 32 + 16 + 8 + 1 = 57.

„MINČIŲ SKAITYMAS" PAGAL DEGTUKUS

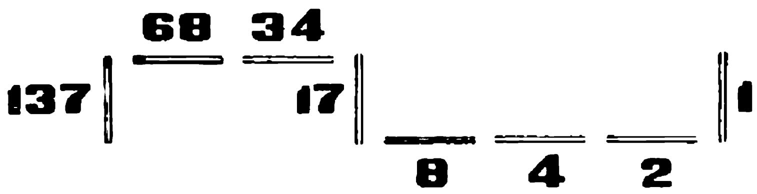
Trečias to paties pokšto atvejis yra savotiškas būdas degtukų pagalba atspėti sugalvotą skaičių. Užmenantis turi mintinai padalyti sugalvotą skaičių pusiau, gautąją pusę — vėl pusiau ir t. t. (nuo nelyginio skaičiaus atmesdamas vienetą) ir kiekvieną kartą dalydamas dėti priešais save degtuką, nukreiptą i š i l g a i stalo, jei dalijamasis skaičius yra lyginis, ir s k e r s a i, jei dalijamasis nelyginis. Operacijos pabaigoje gaunama figūra, panaši į duotąją piešinyje.

Sugalvoto skaičiaus įspėjimas iš degtukų: ką padaro užmenantysis.

Pasižiūrėję į šitą figūrą, jūs neklysdami pasakote sugalvotąjį skaičių: 137.

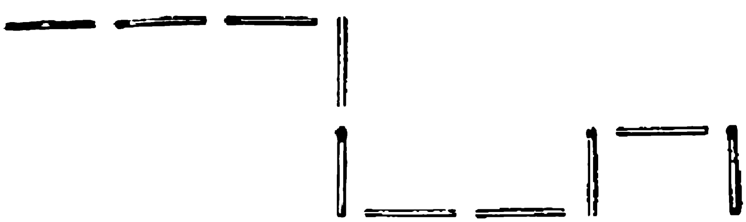
Kaip jūs sužinojote jį?

Metodas paaiškėja savaime, jeigu parinktame pavyzdyje (137) iš eilės, greta kiekvieno degtuko, parašome tą skaičių, kurį dalijant buvo padėtas tas degtukas (žr. piešinį).



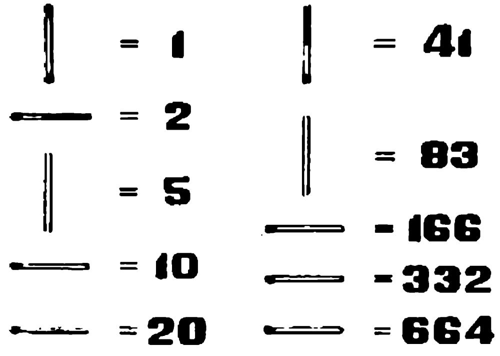
Pokšto paslaptis: ką padaro spėjantysis.

Dabar suprantama, kad paskutinis degtukas v i s a i s a t v e j a i s pažymi skaičių 1, o einant nuo jo į ankstesnes dalybas, galima nesunkiai pasiekti ir pradinį sugalvotą



Koks skaičius čia atvaizduotas?

skaičių. Pavyzdžiui, iš kito piešinio figūros galite išskaičiuoti, kad sugalvotasis skaičius buvo 664. Iš tikrųjų, nuosekliai dvigubindami (pradėję nuo galo) ir nepamiršdami reikiamose vietose pridėti vienetą, gauname sugalvotąjį skaičių (žr. piešinį).



Atsakymas į praeitojo piešinio klausimą.

Tokiu būdu, panaudodami degtukus, galite sekti svetimų minčių eigą, atstatyti ištisą skaičiavimų grandinę.

Tą patį rezultatą galime gauti ir kitaip, laikydami, kad gulsčias degtukas atitinka nulį dvejetainėje sistemoje (dalyba iš 2 be liekanos), o stačias — vienetą.

Tokiu būdu, pirmame pavyzdyje sugalvotasis skaičius (skaitant iš dešinės į kairę) yra:

1	0	0	0	1	0	0	1
128	(64)	(32)	(16)	8	(4)	(2)	1

arba dešimtainėje sistemoje:

$$128 + 8 + 1 = 137.$$

O antrame pavyzdyje sugalvotasis skaičius atvaizduojamas dvejetainėje sistemoje taip:

1	0	1	0	0	1	1	0	0	0
512	(256)	128	(64)	(32)	16	8	(4)	(2)	(1)

arba dešimtainėje sistemoje:

$$512 + 128 + 16 + 8 = 664.$$

Pabandykite išspręsti, koks yra sugalvotasis skaičius, jeigu buvo gauta tokia figūra:

Kokį skaičių vaizduoja šita figūra?

Sprendimas yra toks:

Dvejetainės sistemos skaičius „10010101", išreiškus dešimtainėje, yra

$$128 + 16 + 4 + 1 = 149.$$

Pažymėtina, kad po paskutinės dalybos gautą vienetą reikia pažymėti taip pat stačiu degtuku.

IDEALUS SVARSČIŲ RINKINYS

Kai kuriems skaitytojams, tikriausiai, jau kilo klausimas: kodėl darydami aukščiau aprašytus bandymus naudojamės kaip tik dvejetaine sistema? Juk kiekvieną skaičių galima atvaizduoti bet kurioje sistemoje, tarp kitko ir dešimtainėje. Kuo gi paaiškinti, kad dvejetainei sistemai čia teikiama pirmenybė?

Paaiškinama taip: šitoje sistemoje, be nulio, vartojamas tiktai vienas skaitmuo — vienetas, vadinasi skaičius susidaro iš įvairių dvejeto laipsnių, paimtų tiktai po vieną kartą. Jeigu pokšte su piniginėmis pinigus būtume išskirstę, pavyzdžiui, pagal penketainę sistemą, tai bet kurią sumą sudaryti, neatidarydami piniginių, būtume galėję tik tuo atveju, kai kiekviena piniginė pasikartotų pas mus ne mažiau kaip 4 kartus (penketainėje sistemoje, be nulio, juk vartojami keturi skaitmenys).

Beje, esti atvejų, kai panašiems tikslams patogiau naudoti ne dvejetainę, o truputį pakeistą t r e j e t a i n ę sistemą. Tokio atvejo pavyzdys yra garsus senovinis „uždavinys apie svarsčius“, kuris gali būti ir aritmetinio pokšto siužetu.

Įsivaizduokite, kad jums duotas uždavinys sugalvoti rinkinį iš keturių svarsčių, kurių pagalba būtų galima atsverti bet kurį sveiką skaičių kilogramų, nuo 1 iki 40 kilogramų. Dvejetainė sistema jums nurodo rinkinį:

1 *kg*, 2 *kg*, 4 *kg*, 8 *kg*, 16 *kg*,

kuriuo galima atsverti visus krūvius nuo 1 iki 31 *kg*. Tačiau aiškiai matyti, kad šis rinkinys nepatenkina reikalaujamų sąlygų nei pagal svarsčių skaičių, nei pagal didžiausią krūvį (31 *kg* vietoje 40). Iš kitos pusės, čia nepanaudojama galimybė dėti svarsčius ne tiktai ant vienos svarstyklių lėkštelės, bet ir ant dviejų, t. y. panaudoti ne tik svarsčių sumą, bet ir jų s k i r t u m ą. Pastaroji galimybė duoda tiek įvairiausių kombinacijų, kad jūs visiškai pasimetate beieškodami, nebesurasdami jokios sistemos.

Jei jums nepavyks pataikyti į teisingą kelią, jūs būsite pasirengę net suabejoti, ar iš viso įmanoma uždavinį išspręsti su tiek maža svarsčių — tik su keturiais.

Nusimanantis visus sunkumus išsprendžia nuostabiai paprastai, parinkdamas šiuos keturis svarsčius:

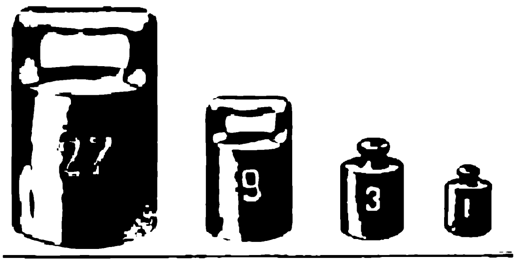
1 *kg*, 3 *kg*, 9 *kg*, 27 *kg*.

Šitokius svarsčius dėdami tai ant vienos, tai ant abiejų svarstyklių lėkštelių, galėsite atsverti bet kurį sveiką skaičių kilogramų, iki 40 *kg*. Pavyzdžių neduodame, nes kiekvienas lengvai gali pats įsitikinti tuo, kad toks svarsčių rinkinys visiškai tinka mūsų tikslui. Geriau išsiaiškinsime, k o d ė l kaip tik nurodytoji eilutė turi šią savybę.

Skaitytojai, tikriausia, jau pastebėjo, kad tie skaičiai yra skaičiaus 3 įvairių laipsnių[1] eilutė:

$$3^0,\ 3^1,\ 3^2,\ 3^3.$$

Tai reiškia, kad mes čia pasinaudojome trejetaine skaičiavimo sistema. Svarsčiai yra tos trejetainės sistemos skaitmenys. Bet kaip panaudoti minėtą sistemą, kai reikalingas svoris išreiškiamas dviejų svarsčių skirtumu? Ir



Rinkinys svarsčių, kuriais galima atsverti bet kokį krūvį nuo 1 iki 40 *kg*.

kaip išvengti svarsčių dvigubinimo (juk trejetainėje sistemoje, be nulio, vartojami du skaitmenys: 1 ir 2)?

Ir viena, ir kita galima pasiekti, įvedus „neigiamus“ skaitmenis. Daroma tiesiog taip: vietoje skaitmens 2 imamas 3—1, t. y. aukštesnio skyriaus vienetas, iš kurio atimamas žemesnio skyriaus vienetas. Pavyzdžiui, mūsų pakeistoje trejetainėje sistemoje skaičius 2 pažymimas ne 2, bet $1\bar{1}$, kur minusas virš vienetų skaitmeniu rodo, kad šį vienetą reikia ne pridėti, bet atimti. Lygiai taip pat skaičius 5 atvaizduojamas ne 12, o $1\bar{1}\bar{1}$ (t. y. $9-3-1=5$).

Dabar aišku, kad jeigu kiekvieną skaičių galima atvaizduoti trejetainėje sistemoje, panaudojant nulį (t. y. skaičiaus nebuvimo ženklą) ir tiktai vieną skaitmenį, būtent pridedamą arba atimamą vienetą, — tai iš skaičių 1, 3, 9,

[1] Vienetą galima laikyti trejeto nuliniu laipsniu.

27 galima sudedant arba atimant sudaryti visus skaičius nuo 1 iki 40. Mes lyg ir rašome visus tuos skaičius, naudodami svarsčius vietoje skaitmenų. Sudėties atvejis atitinka tą svėrimo atvejį, kai svarsčiai visi sudėti ant vienos lėkštelės, o atimties atvejis — kai dalis svarsčių dedama ant lėkštelės su preke ir, vadinasi, jų svoris a t i m a m a s iš kitų svarsčių svorio. Nulis atitinka tokį atvejį, kai svarsčio n ė r a.

Kaip žinome, tokia sistema praktikoje nevartojama. Visur pasaulyje, kur įvesta metrinė matų sistema, yra vartojamas rinkinys iš 1, 2, 2, 5 vienetų, o ne iš 1, 3, 9, 27, nors pirmuoju galima sverti krūvius tiktai iki 10 vienetų, o antruoju — iki 40. Rinkinys 1, 3, 9, 27 nebuvo vartojamas ir prieš įvedant metrinę sistemą. Kodėlgi praktikoje atsisakoma nuo šio, atrodytų, tobulo svarsčių rinkinio?

Priežastis ta, kad idealus svarsčių rinkinys yra patogus tiktai popieriuje, o praktikoje naudoti jį yra gan keblu. Jeigu reikėtų tiktai atsverti duotą svorio vienetų skaičių — pavyzdžiui, 400 *g* sviesto arba 2500 *g* cukraus, — tai 100, 300, 900, 2700 *g* svorio svarsčių sistemą būtų galima naudoti praktikoje (nors ir čia reikėtų kiekvieną kartą ilgai ieškoti atitinkamos kombinacijos). Tačiau kai reikia nustatyti, kiek sveria duota prekė, tai panašus svarsčių rinkinys pasirodo esąs visiškai nepatogus: čia neretai, norint pridėti prie esamų svarsčių vieną vienetą, tektų iš pagrindų pakeisti buvusią kombinaciją kita, nauja. Tokiomis sąlygomis svėrimas yra labai lėtas ir varginantis.

Ne kiekvienas greitai suvoks, kad, pavyzdžiui, 19 *kg* svoris bus gautas, padėjus ant vienos lėkštelės 27 *kg* ir 1 *kg* svarsčius, o ant kitos — 9 *kg;* 20 *kg* svoris — padėjus ant vienos lėkštelės 27 *kg* ir 3 *kg,* o ant kitos — 9 *kg* ir 1 *kg*. Sveriant kiekvieną kartą reikėtų spręsti panašius galvosūkius. Svarsčių rinkinys 1, 2, 2, 5 panašių sunkumų nesukelia.

IŠ ANKSTO NUMATYTI NEPARAŠYTŲ SKAIČIŲ SUMĄ

Ką galima pasakyti apie žmogų, kuris parašys sumą anksčiau, negu jam bus pasakyti visi dėmenys?

Tai, žinoma, pokštas, ir atliekamas jis šitokiu būdu. Spėjantysis pasiūlo jums parašyti kokį nors laisvai parinktą daugiaženklį skaičių. Žvilgterėjęs į pirmąjį dėmenį, spėjantysis ant popieriaus užrašo viso būsimų dėmenų stulpelio sumą ir atiduoda jums saugoti. Po to jis prašo jus (arba ką nors iš dalyvaujančiųjų) parašyti dar vieną dėmenį, — vėl kokį norite. O pats paskui greitai parašo trečiąjį dėmenį. Jūs sudedate visus tris parašytus skaičius — ir gaunate kaip tik tą rezultatą, kurį iš anksto buvo užrašęs ir perdavęs jums spėjantysis.

Jeigu, pavyzdžiui, pirmą kartą jūs parašėte skaičių 83 267, tai spėjantysis rašo būsimąją sumą 183 266. Po to jūs rašote, pavyzdžiui, 27 935, o spėjantysis parašo trečiąjį dėmenį 72 064:

I	. . . . Jus:	83 267
III	. . . . . Jūs:	27 935
IV	Spėjantysis:	72 064
II	. . . . . . Suma:	183 266

Gaunama tiksliai iš anksto nurodytoji suma, nors spėjantysis negalėjo žinoti, koks bus antrasis dėmuo. Spėjantysis gali iš anksto pasakyti taip pat penkių arba septynių dėmenų sumą, bet tada jis pats parašo du arba tris iš jų. Čia negali būti jokio įtarinėjimo, kad popierėlis su užrašytu rezultatu buvo pakeistas, nes jis visą laiką buvo jūsų paties kišenėje. Matyt, spėjantysis panaudoja kažkokią jums nežinomą skaičių savybę. Kokią?

Jis pasinaudoja tuo, kad, pridėjus, pavyzdžiui, prie penkiaženklio skaičiaus skaičių iš penkių devyniukių

(99 999), visas skaičius padidėja 100 000 — 1, t. y. jo priekyje atsiranda vienetas, o paskutinis skaitmuo vienetu sumažėja. Pavyzdžiui:

$$\begin{array}{r} 83\,267 \\ +\ 99\,999 \\ \hline 183\,266 \end{array}$$

Šią sumą, t. y. jūsų parašyto skaičiaus ir 99 999 sumą, spėjantysis ir užrašo popieriuje kaip būsimą sudėties rezultatą. O kad rezultatas pasitvirtintų, jis, pamatęs jūsų antrąjį dėmenį, parenka trečiąjį, savąjį dėmenį taip, kad kartu su antruoju jis sudarytų 99 999, t. y. kiekvieną antrojo dėmens skaitmenį atima iš 9. Šitas operacijas galite lengvai pasekti praeitame pavyzdyje, o taip pat šiuose:

I	Jūs:	379 264
III	. . . Jūs:	4 873
IV	. Spėjantysis:	995 126
II .	Suma:	1 379 263

I . . .	. . . Jūs:	9 035
III	. . . Jūs:	5 669
IV .	. Spėjantysis:	4 330
II .	. . . . Suma:	19 034

Lengva pastebėti, kad jūs smarkiai apsunkinate spėjantįjį, jeigu antrasis jūsų dėmuo susideda iš daugiau skaitmenų, negu pirmasis: spėjantysis negalės parašyti dėmens, kuris sumažintų antrąjį dėmenį ir pateisintų iš anksto numatytą per mažą rezultatą. Todėl prityręs spėjėjas įžvalgiai apriboja pasirinkimo laisvę ta sąlyga.

Pokštas esti daug įtaigesnis, kai dėmenis sugalvoja keletas asmenų. Po pirmo dėmens — pavyzdžiui, 437 692 — spėjantysis jau pasako visų penkių skaičių sumą, būtent, užrašo skaičių 2 437 690 (čia reikės 999 999 pridėti du kartus, t. y. 2 000 000 — 2). Tolesni veiksmai aiškūs iš schemos:

I	. . . Jūs parašėte:	437 692
III	. . Antrasis parašė:	822 541
V	. . Trečiasis parašė:	263 009
IV	. Spėjantysis pridėjo:	177 458
VI	. . „ „	736 990
II	. Spėjantysis iš anksto pasakė:	2 437 690

Dar vienas pavyzdys:

I	. . . . Jūs parašėte:	7 400
III	. . . Antrasis parašė:	4 732
V	. . . Trečiasis parašė:	9 000
IV	. . Spėjantysis pridėjo:	5 267
VI	. . „ „	999
II	. . Spėjantysis iš anksto pasakė:	27 398

Skaitytojams bus įdomu dabar sužinoti, kaip tarybinis rašytojas Šiškovas aprašo tą patį pokštą savo romane „Klajūnai“:

„Ivanas Petrovičius išplėšė iš bloknoto lapelį, padavė berniūkščiui, paklausė:

— Pieštuką turi?.. Rašyk bet kokį skaičių.

Berniūkštis parašė. Ivanas Petrovičius, prabėgomis žvilgterėjęs į tą skaičių, ant atskiros popieriaus skiautės užrašė savo kažkokį skaičių, įkišo popierėlį į šiaudus ir pridengė skrybėle.

— Parašyk po juo kitą. Parašei?.. Dabar aš pats parašysiu trečiąjį. Dabar visus tris skaičius sudėk. Tiktai atidžiai, nesuklysk.

Po dviejų minučių atsakymas buvo paruoštas ir patikrintas. Inžinierius Voškinas (berniuko pravardė. — *J. P.*) padavė savo skaičiavimus:

$$
\begin{array}{r}
46\,853 \\
+\ 21\,398 \\
78\,601 \\
\hline
146\,852
\end{array}
$$

— Šimtas keturiasdešimt šeši tūkstančiai aštuoni šimtai penkiasdešimt du, Ivanai Petrovičiau.

— Ilgai skaičiuoji. O štai jis, manasis, atsakymas. Aš jį žinojau jau tada, kai tu parašei tiktai pirmąjį skaičių. Štai. Trauk iš po skrybėlės.

Berniūkštis ištraukė popierėlį. Ten buvo parašyta: „146 852".

Romane pokštas lieka nepaaiškintas. Tačiau jums, be abejonės, visiškai suprantamas jo nesudėtingas aritmetinis pagrindas.

TARIAMASIS NETIKĖTUMAS

1916 metais, pačiame imperialistinio karo įkarštyje, kai kurie neutralios Šveicarijos laikraščiai buvo užimti aritmetiniu „būrimu"... apie būsimą Vokietijos ir Austrijos imperatorių likimą. „Pranašai" dėliojo tokius skaičių stulpelius:

Vilhelmui II:

Gimimo metai	1859
Įžengimo į sostą metai . .	. 1888
Viešpatavimo metų skaičius .	. 28
Amžius . . . . , ...	57
Suma:	3832

Pranui-Juozapui:

Gimimo metai	1830
Įžengimo į sostą metai . .	. . . 1848
Viešpatavimo metų skaičius	68
Amžius	86
Suma:	3832

„Pranašai" sumų sutapimą laikė liūdnu ženklu karūnuotoms asmenybėms ir, kadangi kiekviena suma buvo lygi dvigubiems 1916 metams, abiem imperatoriams pranašavo žuvimą kaip tik šitais metais.

Tuo tarpu rezultatų sutapimas iš matematinės pusės nėra netikėtas. Truputį pakeitus dėmenų tvarką, tampa aišku, kodėl kiekvieno jų suma lygi dvigubiems 1916 metams. Iš tikrųjų, surašykime dėmenis taip:

gimimo metai,
amžius,
įžengimo į sostą metai,
viešpatavimo metų skaičius.

Ką gausime, pridėję prie gimimo metų amžių? Savaime aišku, kad tų metų, kuriais skaičiuojame, datą. Lygiai taip pat, prie įžengimo į sostą metų pridėję viešpatavimo metų skaičių, vėl gausime metus, kuriais atliekamas tas skaičiavimas. Aišku, kad mūsų keturių dėmenų sudėties rezultatas tegali būti tiktai padvigubinti metai, kuriais atliekame tą sudėtį. Aiškiai matyti, imperatorių likimas nuo panašios aritmetikos visiškai nepriklauso...

Kadangi tai, kas aukščiau pasakyta, ne visi lengvai suvoks, galima šituo pasinaudoti įdomiam aritmetiniam pokštui. Pasiūlykite kam nors parašyti paslapčia nuo jūsų keturis skaičius:

gimimo metus,
įstojimo į mokyklą (gamyklą ir pan.) metus,
amžių,
mokymosi mokykloje (darbo gamykloje ir pan.) metų skaičių.

Jūs imatės atspėti šitų skaičių sumą, nors nė vieno iš jų nežinote. Jūs padvigubinate pokšto atlikimo metus ir paskelbiate rezultatą. (Pavyzdžiui, jeigu pokštas daromas 1957 metais, tai suma — 3914.)

Kad galėtumėte tokį pokštą atlikti keletą kartų iš eilės, neišduodami jo paslapties, liepkite klausytojui su suma atlikti kokius nors aritmetinius veiksmus, tuo jūs užmaskuosite savąjį metodą.

AKIMIRKSNINĖ DALYBA

Iš gausių šios rūšies pokštų variantų aprašysime vieną, kuris remiasi jau mums žinoma daugiklio, susidedančio tiktai iš eilės devyniukių, savybe: kai iš jo dauginamas skaičius, susidedantis iš tiek pat skaitmenų, gaunamas rezultatas, susidedantis iš dviejų pusių: pirmoji — tai dauginamasis skaičius, sumažintas vienetu; antroji — pirmosios pusės atėmimo iš daugiklio rezultatas. Pavyzdžiui: $247 \times 999 = 246\,753$; $1372 \times 9999 = 13\,718\,628$ ir t. t. Priežastį lengva įžiūrėti iš šios eilutės:

$$247 \times 999 = 247 \times (1000 - 1) = 247\,000 - 247 = 246\,999 - 246.$$

Šituo pasinaudodami, jūs siūlote grupei draugų dalyti daugiaženklius skaičius: vienam — 68 933 106 : 6894, kitam — 8 765 112 348 : 99 999, trečiam — 543 456 : 544, ketvirtam — 12 948 705 : 1295 ir t. t., o pats imatės, spręsdamas tuos pat uždavinius, juos visus aplenkti. Ir dar jiems nespėjus pradėti dalybą, jūs jau įteikiate kiekvienam iš jų popierėlį su jūsų gautu teisingu dalybos rezultatu: pirmajam — 9999, antrajam — 87 652, trečiajam — 999, ketvirtajam — 9999.

Pagal nurodytą pavyzdį jūs patys galite sugalvoti eilę kitokių būdų nenusimanantiems nustebinti akimirksnine dalyba: tuo tikslu pasinaudokite kai kuriomis savybėmis tų skaičių, kurie yra „Skaitinių keistenybių galerijoje“.

MĖGIAMASIS SKAITMUO

Paprašykite ką nors pasakyti jums savo mėgiamąjį skaitmenį. Pavyzdžiui, jums pasakė skaitmenį 6.

— Tai nuostabu! — sušunkate jūs. Juk jis yra pats nuostabiausias iš visų reikšmingųjų skaitmenų.

— Kuo gi jis nuostabus? — teiraujasi susidomėjęs pašnekovas.

— Štai pažiūrėkite: savo mėgiamąjį skaitmenį padauginkite iš reikšmingųjų skaitmenų skaičiaus, t. y. iš 9, ir gautą skaičių (54) parašykite kaip daugiklį po skaičiumi 12 345 679:

$$\begin{array}{r} 12\,345\,679 \\ \times \quad 54 \\ \hline \end{array}$$

Ką gausite sudauginę?

Jūsų pašnekovas atlieka daugybą — ir nustebęs gauna rezultatą, kuris susideda vien iš jo mėgiamųjų skaitmenų: 666 666 666.

— Matote, koks rafinuotas yra jūsų aritmetinis skonis, — baigiate jūs. — Iš visų skaitmenų jūs pasirinkote kaip tik tą, kuris turi tokią nuostabią savybę!

Tačiau kas čia yra?

Lygiai toks pat rafinuotas jūsų pašnekovo skonis būtų buvęs ir tada, jeigu jis būtų pasirinkęs bet kurį kitą iš devynių reikšmingųjų skaitmenų, nes kiekvienas iš jų turi tą pačią savybę:

$$\begin{array}{r} 12\,345\,679 \\ \times\, 4 \times 9 \\ \hline 444\,444\,444 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 12\,345\,679 \\ \times\, 7 \times 9 \\ \hline 777\,777\,777 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 12\,345\,679 \\ \times\, 9 \times 9 \\ \hline 999\,999\,999 \end{array}$$

Kodėl taip yra, suprasite, jeigu prisiminsite tai, kas buvo kalbėta apie skaičių 12 345 679 „Skaitinių keistenybių galerijoje".

ĮSPĖTI GIMIMO DATĄ

Šitos kategorijos pokštai gali būti įvairiausiai kaitaliojami.

Aprašysiu vieną tokios rūšies pokštų variantą. Jis yra gana sudėtingas, bet užtat palieka stiprų įspūdį.

Pavyzdžiui, jūs gimėte gegužės 18 dieną ir dabar jums 23 pilni metai. Aš, žinoma, nežinau nei jūsų gimimo datos, nei jūsų amžiaus. Tačiau aš imuosi atspėti ir viena, ir kita, liepęs jums atlikti tiktai eilę skaičiavimų.

Būtent: aš paprašau jus mėnesio eilės numerį (gegužė, 5-sis mėnuo) padauginti iš 100, prie sandaugos pridėti mėnesio dieną (18), sumą padvigubinti, prie rezultato pridėti 8, gautą skaičių padauginti iš 5, prie sandaugos pridėti 4, rezultatą padauginti iš 10, pridėti 4 ir prie gauto skaičiaus pridėti jūsų amžių (23).

Visa tai atlikę, pranešate man galutinį skaičiavimų rezultatą. Aš atimu iš jo 444, o skirtumą suskirstau iš dešinės į kairę grupėmis po du skaitmenis kiekvienoje: ir iš karto gaunu tiek jūsų gimimo mėnesį ir dieną, tiek ir jūsų amžių.

Iš tikrųjų. Nuosekliai atlikime visus aukščiau nurodytus skaičiavimus:

$$
\begin{aligned}
5 \times 100 &= 500 \\
500 + 18 &= 518 \\
518 \times 2 &= 1\,036 \\
1\,036 + 8 &= 1\,044 \\
1\,044 \times 5 &= 5\,220 \\
5\,220 + 4 &= 5\,224 \\
5\,224 \times 10 &= 52\,240 \\
52\,240 + 4 &= 52\,244 \\
52\,244 + 23 &= 52\,267
\end{aligned}
$$

Iš 52 267 atėmę 444, gauname skaičių — 51 823.

Dabar šitą skaičių suskirstykime iš dešinės į kairę grupėmis po du skaitmenis kiekvienoje. Gausime:

5—18—23,

t. y. 5-to mėnesio (gegužės) 18 dieną; amžius 23 metai.

Kodėl gavome tokį rezultatą?

Mūsų paslaptį lengva suprasti, išnagrinėjus šią lygybę:

$$
\{[(100m + t) \times 2 + 8] \times 5 + 4\} \times 10 + 4 + n - 444 = 10\,000\,m + 100\,t + n.
$$

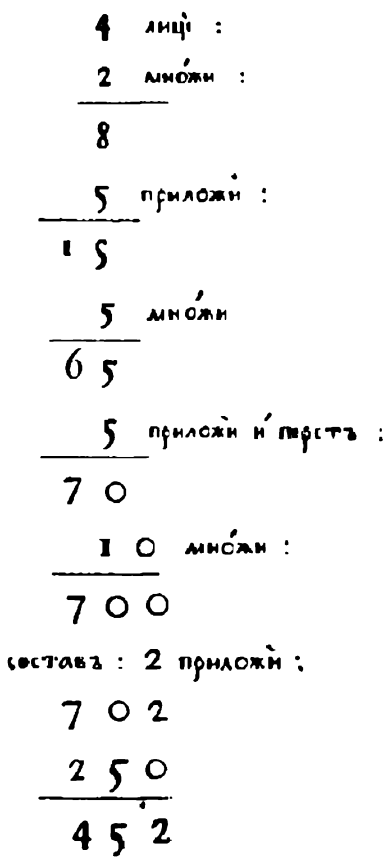
Čia raidė m pažymi mėnesio eilės numerį, t — mėnesio dieną, n — amžių. Lygybės kairioji pusė vaizduoja visus jūsų iš eilės atliktus veiksmus, o dešinioji — tai, ką gaunate, atidarę skliaustelius ir atlikę visus galimus suprastinimus.

Reiškinyje $10\,000\,m + 100\,t + n$ nei m, nei t, nei n negali būti didesni kaip dviženkliai skaičiai; todėl rezultatinis skaičius, suskirsčius jį grupėmis po du skaitmenis, visuomet turi suskilti į tris dalis, išreiškiančias ieškomuosius skaičius m, t ir n.

Paliekame skaitytojo išradingumui sugalvoti kitokius pokšto variantus, t. y. kitokias veiksmų kombinacijas, duodančias panašų rezultatą.

VIENAS IŠ MAGNICKIO „SMAGIŲ VEIKSMŲ"

Siūlau skaitytojui atrasti paslaptį taip pat šio nesudėtingo pokšto, aprašyto dar Magnickio „Aritmetikos" skyriuje „Apie kai kuriuos smagius veiksmus, per aritmetiką panaudojamus".



Matematinis pokštas iš L. Magnicko „Aritmetikos", 1703 m.

Tegul kas nors sugalvoja kokį nors skaičių, liečiantį pinigus, dienas, valandas arba kokį nors kitą skaičiuojamą daiktą. Sustosime ties žiedu, kuris užmautas ant 4-jo iš 8 žmonių rankos mažylio piršto (t. y. 5-jo piršto) 2-jo sąnario. Kada į tokią draugiją ateina spėjantysis, jį kiti klausia, pas kurį iš 8 žmonių (pažymėtų numeriais nuo 1 iki 8), ant kurio piršto ir ant kelinto sąnario yra užmautas žiedas?

„O jis ir sako: kas nors iš jūsų padauginkite tąjį, kuris paėmė, iš 2, prie to pridėkite 5, po to vėl padauginkite iš 5, taip pat pridėkite pirštą, ant kurio yra žiedas (t. y. prie gauto rezultato pridėkite piršto su žiedu numerį). O po to padauginkite iš 10 ir pridekite sąnarį, ant kurio užmautas žiedas, ir taip gautą skaičių sakykite jam, nes tai ir yra ko jis ieškojo.

Jie pasielgė, kaip buvo jiems liepta, padaugino ketvirtą žmogų, kuris paėmė žiedą, ir viską suskaičiavo, kaip buvo paliepta; tai ir parodyta yra (žr. apskaičiavimus); iš viso rinkinio jis gavo skaičių 702, iš jo jis atėmė 250, liko 452, t. y. 4-sis žmogus, 5-sis pirštas, 2-sis sąnarys".

Nėra ko stebėtis, kad šitas aritmetinis pokštas buvo žinomas dar prieš 200 metų: visiškai panašios rūšies uždavinį aš radau viename iš pirmųjų matematinių pramogų rinkinių, būtent Baše-de-Mezirjako knygoje „Įdomūs ir malonūs skaitiniai uždaviniai", kuri pasirodė 1612 metais; o ten jis pateko iš Leonardo Pizano veikalo (1202 m.). Pažymėtina, kad didelė dalis matematinių žaidimų, galvosūkių ir pramogų, paplitusių mūsų laikais, yra labai senos kilmės.

SKAIČIŲ ĮSPĖJIMAS

Pabaigai, nieko jūsų neklausdamas, aš įspėsiu rezultatą, kurį jūs gausite atlikę skaičiavimus su jūsų pačių sugalvotu skaičiumi.

Sugalvokite bet kokį skaitmenį, išskyrus nulį. Padauginkite jį iš 37. Gautą rezultatą padauginkite iš 3. Paskutinį sandaugos skaitmenį nubraukite, o likusį skaičių padalykite iš pradžioje sugalvoto skaičiaus; liekanos nebus.

Aš galiu pasakyti, kokį skaičių jūs gavote, nors tai aš parašiau daug anksčiau, negu jūs pradėjote skaityti knygą.

Jūs gavote skaičių 11.

Antrą kartą pokštą atliksime kitokiu būdu. Sugalvokite dviženklį skaičių. Prie jo iš dešinės prirašykite tą patį skaičių dar kartą. Gautą keturženklį skaičių padalykite iš jūsų pradžioje sugalvoto skaičiaus: dalmuo yra sveikas skaičius. Visus dalmens skaitmenis sudėkite.

Jūs gavote 2.

Jeigu ne taip, atidžiai patikrinkite savuosius skaičiavimus ir įsitikinsite, kad apsirikote jūs, o ne aš.

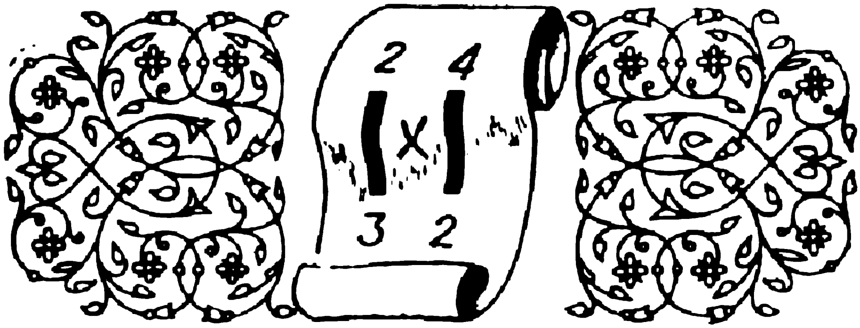
Kame šitų pokštų paslaptis?

Į s p ė j i m a s.

Mūsų skaitytojas dabar jau pakankamai prityręs pokštų įspėjime, ir todėl ilgai aiškinti nereikės. Pirmame spėjimo pratime sugalvotasis skaičius buvo dauginamas pradžioje iš 37, o po to iš 3. Bet $37 \times 3 = 111$, o padauginti skaičių 111 — reiškia sudaryti skaičių iš trijų vienodų skaitmenų (pavyzdžiui, $4 \times 37 \times 3 = 444$). Ką mes veikėme toliau? Mes nubraukėme paskutinį skaitmenį ir gavome skaičių iš dviejų vienodų skaitmenų (44), kuris, žinoma, turi pasidalyti iš sugalvotojo skaičiaus ir duoti dalmenyje 11.

Antrame pratime sugalvotą dviženklį skaičių parašėme du kartus iš eilės — pavyzdžiui, sugalvoję 29, parašėme 2929. O tai yra tas pats, ką ir sugalvotą skaičių padauginti iš 101 (iš tikrųjų, $29 \times 101 = 2929$). Jeigu tai man žinoma, aš su įsitikinimu galiu numatyti, kad, padalijus tokį keturženklį skaičių iš sugalvotojo skaičiaus, bus gauta 101, o taip pat ir tai, kad dalmens suma $(1 + 0 + 1)$ lygi 2.

Kaip matote, įspėjimas pagrįstas skaičių 111 ir 101 savybėmis; mes turime visišką teisę šituos abu skaičius patalpinti mūsų aritmetinėje kunstkameroje.



SEPTINTASIS SKYRIUS

GREITAS SKAIČIAVIMAS

PAGREITINTOS DAUGYBOS METODAI

Vienas iš pagreitintos daugybos metodų yra kryžminio dauginimo metodas, labai patogus veiksmuose su dviženkliais skaičiais. Šitas būdas ne naujas: jis atėjo iš graikų ir indų ir senovėje vadinosi „žaibo metodu“ arba „daugyba kryžiuku“.

Pavyzdžiui, reikia padauginti 24 × 32. Mintyse skaičius išdėstome vieną po kitu, pagal šią schemą:

$$\begin{array}{ccc} 2 & & 4 \\ | & \times & | \\ 3 & & 2 \end{array}$$

Dabar iš eilės atliksime šiuos veiksmus:

1) $4 \times 2 = 8$ — tai paskutinis rezultato skaitmuo;

2) $2 \times 2 = 4$; $4 \times 3 = 12$; $4 + 12 = 16$; 6 — priešpaskutinis rezultato skaitmuo; vienetas mintyse;

3) $2 \times 3 = 6$, o be to, dar vienetas mintyse, iš viso 7 — tai pirmasis rezultato skaitmuo.

Gauname visus sandaugos skaitmenis: 7, 6, 8 — 768.

Šitas būdas po neilgų pratybų įsisavinamas labai lengvai.

Kitas būdas, kuriame naudojami vadinamieji „papildiniai“, patogiai naudojamas tais atvejais, kai dauginamieji skaičiai artimi 100.

Pavyzdžiui, reikia sudauginti 92 × 96. Skaičiui 92 „papildinys“ iki 100 yra 8, o skaičiui 96 — 4. Veiksmas atliekamas pagal šią schemą:

daugikliai: 92 ir 96,
papildiniai: 8 ir 4.

Pirmieji du rezultato skaitmenys yra gaunami tiesiog atimant iš daugiklio dauginamojo „papildinį“ arba atvirkščiai: t. y. iš 92 atimant 4 arba iš 96 — 8. Abiem atvejais gaunama 88; prie šito skaičiaus prirašoma „papildinių“ sandauga: 8 × 4 = 32. Gaunamas rezultatas — 8832.

Kad gautasis rezultatas yra teisingas, aiškiai matyti iš šių pertvarkymų:

$$92 \times 96 = \left\{ \begin{array}{l} 88 \times 96 = 88\,(100 - 4) = 88 \times 100 - 88 \times 4 \\ \underline{4 \times 96 = 4\,(88 + 8) = 4 \times 8 + 88 \times 4} \\ 92 \times 96 \qquad = \qquad 8832 + 0 \end{array} \right.$$

Dar vienas pavyzdys — reikia padauginti 78 iš 77:

dauginamieji: 78 ir 77,
papildiniai: 22 ir 23.
78 — 23 = 55,
22 × 23 = 506,
5500 + 506 = 6006.

KASDIENINIAMS SKAIČIAVIMAMS

Yra labai daug pagreitinto aritmetinių veiksmų atlikimo būdų — būdų, skirtų kasdieniniams skaičiavimams. Aprašius nors ir tiktai svarbiausius iš jų, susidarytų visa knyga. Todėl aš paliesiu tiktai kelis pavyzdžius, patogiausius naudoti.

Techninių ir prekybinių skaičiavimų praktikoje labai dažnai tenka sudėti skaičių, artimų vienas kitam savo didumu, stulpelius. Pavyzdžiui:

$$\left.\begin{array}{r}43\\38\\39\\45\\41\\39\\42\end{array}\right\}$$

Šitokių skaičių sudėtis žymiai supaprastėja, panaudojus tokį metodą, kurio esmė lengvai suprantama:

$$\left.\begin{array}{l}43=40+3\\38=40-2\\39=40-1\\45=40+5\\41=40+1\\39=40-1\\42=40+2\end{array}\right\}\quad\begin{array}{l}40\times 7=280\\3-2-1+5+1-1+2=7\\280+7=287\end{array}$$

Lygiai taip pat randame sumą:

$$\left.\begin{array}{l}752=750+2\\753=750+3\\746=750-4\\754=750+4\\745=750-5\\751=750+1\end{array}\right\}\quad 750\times 6+1=4501$$

Panašus būdas yra naudojamas, kai ieškoma skaičių, artimų savo didumu, aritmetinio vidurkio. Pavyzdžiui, rasime šių kainų vidurkį:

rub.	kap.
4	65
4	73
4	75
4	67
4	78
4	74
4	68
4	72

Iš akies numatome apvalią kainą, artimą vidurkiui, — šiuo atveju, matyt, 4 rub. 70 kap. Užrašome visų kainų nukrypimus nuo vidurkio: perteklius su ženklu +, nepriteklius su ženklu —.

Gauname:

$$-5+3+5-3+8+4-2+2=12.$$

Nukrypimų sumą padalijęs iš jų skaičiaus, gauname:

$$12:8=1{,}5.$$

Ir ieškomoji vidutinė kaina:

$$4 \text{ rub. } 70 \text{ kap.} + 1{,}5 \text{ kap.} = 4 \text{ rub. } 71{,}5 \text{ kap.}$$

O dabar apie d a u g y b ą. Pirmiausia nurodysime, kad daugyba iš 5, 25 ir 125 žymiai pagreitėja, jeigu atsimenama, kad:

$$5 = \frac{10}{2}; \quad 25 = \frac{100}{4}; \quad 125 = \frac{1000}{8}.$$

Todėl, pavyzdžiui:

$$36 \times 5 = \frac{360}{2} = 180; \qquad 87 \times 5 = \frac{870}{2} = 435,$$

$$36 \times 25 = \frac{3600}{4} = 900; \qquad 87 \times 25 = \frac{8700}{4} = 2175;$$

$$36 \times 125 = \frac{36\,000}{8} = 4500. \qquad 87 \times 125 = \frac{87\,000}{8} = 10875$$

Dauginant iš 15, galima panaudoti tai, kad:

$$15 = 10 \times 1\frac{1}{2}.$$

Todėl lengva mintinai atlikti panašius skaičiavimus:

$$36 \times 15 = 360 \times 1\frac{1}{2} = 360 + 180 = 540,$$

arba papraščiau:

$$36 \times 1\frac{1}{2} \times 10 = 540;$$

$$87 \times 15 = 870 + 435 = 1305.$$

Dauginant iš 11, nebūtina rašyti penkias eilutes:

$$\begin{array}{r} \times\, 383 \\ 11 \\ \hline 383 \\ +\,383 \\ \hline 4213 \end{array}$$

Pakanka tik po padaugintu skaičiumi parašyti jį dar kartą, pastumtą per vieną skaitmenį:

$$\begin{array}{r} 383 \\ +\,383 \\ \hline 4213 \end{array} \quad \text{arba} \quad \begin{array}{r} 383 \\ +\,383 \\ \hline 4213 \end{array}$$

ir sudėti.

Naudinga atminti pirmų devynių skaičių daugybos iš 12, 13, 14 ir 15 rezultatus. Tuomet daugiaženklių skaičių daugyba iš tokių daugiklių žymiai pagreitėja. Pavyzdžiui, reikia padauginti

$$\times\begin{array}{r}4587\\13\\\hline\end{array}$$

Darome taip. Kiekvieną dauginamojo skaitmenį mintyse dauginame iš karto iš 13:

$7\times13=91$;		1 rašome, 9 mintyse;
$8\times13=104$;	$104+9=113$;	3 rašome, 11 mintyse;
$5\times13=65$;	$65+11=76$;	6 rašome, 7 mintyse;
$4\times13=52$;	$52+7=59$.	

Iš viso — 59 631.

Po keleto pratimų šitas metodas yra lengvai įsisavinamas.

Yra labai patogus metodas dviženkliams skaičiams dauginti iš 11: reikia dauginamojo skaitmenis praskėsti ir į tarpą įrašyti jų sumą:

$$43\times11=473.$$

O jeigu skaitmenų suma yra dviženklė, tai jos dešimčių skaičių reikia pridėti prie dauginamojo pirmojo skaitmens:

$$48\times11=4(12)8,\ \text{t. y. } 528.$$

Pagaliau nurodysime kai kuriuos pagreitintos dalybos būdus.

Dalijant iš 5, dalijamasis ir daliklis dauginami iš 2:

$$3471:5=6942:10=694{,}2.$$

Dalijant iš 25, abu skaičiai dauginami iš 4:

$$3471:25=13\,884:100=138{,}84.$$

Panašiai daroma dalijant iš $1\frac{1}{2}$ ($=1,5$) ir iš $2\frac{1}{2}$ ($=2,5$):

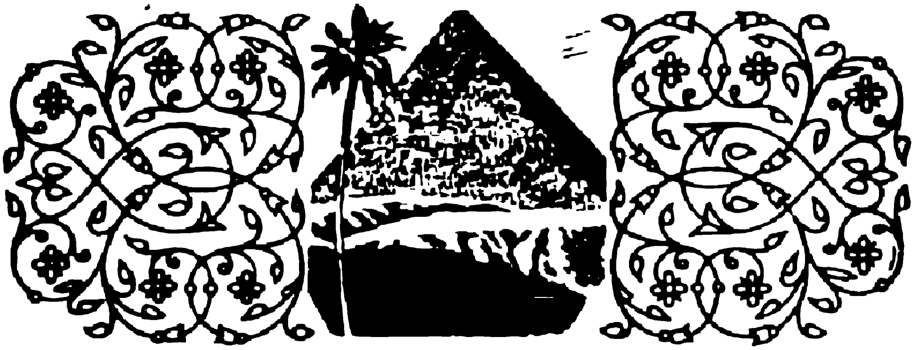
$$3471 : 1^1/_2 = 6942 : 3 = 2314,$$

$$3471 : 2^1/_2 = 13\,884 : 10 = 1388,4.$$

ARITMETINIAI KURIOZAI

Daugyba = sudėčiai

$$2 \times 2 = 2 + 2$$
$$3 \times 1^1/_2 = 3 + 1^1/_2$$
$$11 \times 1,1 = 11 + 1,1$$
$$21 \times 1^1/_{20} = 21 + 1^1/_{20}$$



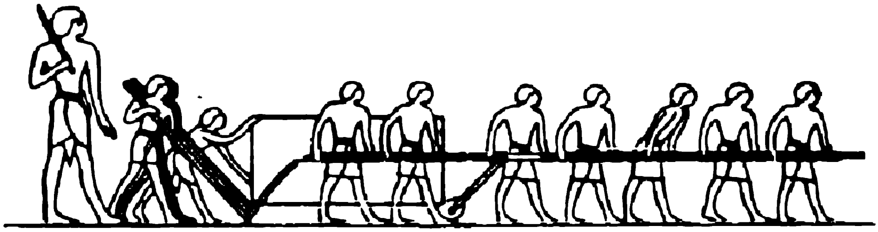
ASTUNTASIS SKYRIUS

CHEOPSO PIRAMIDĖS MATEMATINĖS MĮSLĖS

Cheopso piramidė — aukščiausia senovės Egipto piramidė, kurią jau penkis tūkstančius metų gairina karšti dykumos vėjai, yra be abejo nuostabiausias išlikęs senojo pasaulio statinys. Ji yra beveik 150 *m* aukščio, savo pagrindu užima 40 000 *kv. m* plotą ir yra sukrauta iš 200 eilių milžiniškų akmenų. 30 metų dešimt tūkstančių vergų statė šį pastatą. 10 metų buvo ruošiamas kelias akmenims iš akmens skaldyklos į statybos vietą pervežti, o paskui 20 metų netobulomis to meto mašinomis akmenys buvo rioglinami vienas ant kito.

Būtų keista, kad toks milžiniškas pastatas būtų pastatytas turint vienintelį tikslą — įrengti šalies valdovui kapą. Todėl kai kurie tyrinėtojai ėmė ieškoti: ar neatvers piramidės paslapties jos matmenų santykis?

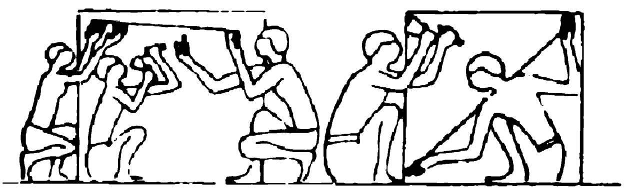
Jų nuomone, jiems pavyko atrasti eilę nuostabių santykių, liudijančių, kad šventikai, statybos darbų vadovai, giliai žinojo matematiką bei astronomiją ir akmeninėse piramidės formose įkūnijo tas savo žinias.



Akmens pervežimas į piramidės statybos vietą. Darbininkams iš paskos eina prižiūrėtojas su bizūnu; kadangi jis yra svarbesnis už kitus darbininkus, tai vaizduojamas didesnis (senovės egiptiečių piešinys).

Prancūzų astronomo More knygoje („Mokslo mįslės", 1 t., 1926) skaitome: „Herodotas[1] pasakoja, kad egiptiečių šventikai atskleidę jam tokį santykį tarp piramidės pagrindo kraštinės ir jos aukštinės: kvadratas, kurio kraštinė būtų piramidės aukštinė, būtų tiksliai lygus kiekvieno šoninio trikampio plotui. Tai visiškai patvirtina naujausi matavimai. Štai įrodymas, kad visais laikais Cheopso piramidė buvo laikoma paminklu, kurio proporcijos matematiškai apskaičiuotos.

Duodu vėlesnį įrodymą: mes žinome, kad santykis tarp apskritimo ilgio ir jo skersmens yra pastovus dydis, gerai



Egiptiečiai, tašydami akmens luitus, naudojo ištemptą virvutę, kurios pagalba surasdavo apdirbamo paviršiaus nelygumus. Akmens tašytojų įrankiai buvo metaliniai kūjeliai su kūgine galvute. Visuose stambiuose egiptiečių pastatuose, įskaitant piramides, milžiniški ir sunkūs tašyto akmens luitai buvo dedami lygiąja puse į vidų, kad geriau susiglaustų vienas su kitu ir kad statinys būtų pastovesnis.

[1] Herodotas — žymus graikų istorikas; jis aplankė Egiptą 300 metų prieš mūsų erą.

žinomas mūsų laikų mokiniams. Apskritimo ilgiui apskaičiuoti pakanka jo skersmenį padauginti iš 3,1416.

Senovės matematikai šitą santykį žinojo tiktai labai apytikriai.

Bet štai, sudėję keturias piramidės pagrindo kraštines, gausime, kad jo perimetras yra lygus 931,22 *m*. Šitą skaičių padalinę iš jos dvigubo aukščio (2 × 148,208), gauname 3,1416, t. y. apskritimo ilgio ir skersmens santykį. (Kiti autoriai iš tų pačių piramidės matavimų išveda dar tikslesnę π reikšmę: 3,14159. — *J. P.*)

Šis savotiškai vienintelis paminklas yra, vadinasi, materialus įkūnijimas skaičiaus „pi", kuris matematikos istorijoje vaidino tokį svarbų vaidmenį. Matome, kad egiptiečių šventikai tiksliai žinojo daugelį tokių klausimų, kurie laikomi vėlesnių amžių mokslininkų atradimu"[1].

Dar nuostabesnis yra kitas santykis: padalijus piramidės pagrindo kraštinę iš tikslaus metų ilgumo — 365,2422 paros, gaunama kaip tik 10 000 000-inė Žemės pusašio dalis — tokiu tikslumu, kurio galėtų pavydėti mūsų laikų astronomai...

Toliau: piramidės aukštis sudaro lygiai milijardinę dalį nuotolio nuo Žemės iki Saulės — dydžio, kurį Europos mokslininkai sužinojo tiktai XVIII amžiaus pabaigoje. Pasirodo, egiptiečiai prieš 5000 metų žinojo tai, ko dar nežinojo nei Galilėjaus[2] ir Keplerio[3] amžininkai, nei Niutono[4]

---

[1] Toks „pi" reikšmės tikslumas, kuris čia gautas iš piramidės matmenų santykio, Europos matematikams žinomas tiktai nuo XVI amžiaus.

[2] G a l i l e o G a l i l ė j u s (1564—1642) — didysis italų fizikas, mechanikas ir astronomas, vienas iš tiksliųjų gamtos mokslų kūrėjų.

[3] J o h a n a s K e p l e r i s (1571—1630) — žymus vokiečių astronomas, kuris, remdamasis didžiojo lenkų mokslininko Nikolajaus Koperniko mokymu, atrado judėjimo dėsnius.

[4] I s a k a s N i u t o n a s (1643—1727) — žymus anglų matematikas, astronomas ir fizikas, visą savo gyvenimą paskyręs išimtinai mokslui.

epochos mokslininkai. Nenuostabu, kad iš tokios rūšies tyrinėjimų Vakaruose atsirado daug literatūros.

O tuo tarpu visa tai — ne daugiau kaip žaidimas skaitmenimis. Reikalas visiškai kitaip atrodys, jeigu jį nagrinėsime, įvertindami apytikrių skaičiavimų rezultatus.

Panagrinėsime iš eilės tuos mūsų pateiktus pavyzdžius.

1. Dėl skaičiaus „pi". Apytikrių skaičių aritmetika teigia, kad, norint gauti kaip dalybos veiksmo rezultatą skaičių su šešiais tikrais skaitmenimis (3,14159), reikia turėti mažiausia tiek pat tikrų skaitmenų dalijamajame ir daliklyje. Taikant piramidei, tai reiškia, kad, norint gauti šešiaženklį „pi", reikėjo piramidės pagrindo kraštines ir aukštinę išmatuoti milijoninių rezultato dalių tikslumu, t. y. 1 *mm* tikslumu. Astronomas More duoda piramidės aukštį 148,208 *m*, pažiūrėjus lyg ir iš tikrųjų 1 *mm* tikslumu.

Tačiau kas gali laiduoti tokį piramidės matavimo tikslumą? Primename, kad Matų instituto (VIMS) laboratorijose, kuriose atliekami tiksliausi pasaulyje matavimai, tokio tikslumo matuojant ilgį nepasiekiama (gaunama matuojant ilgį tiktai šeši tikri skaitmenys). Suprantama, koks tikslumas begali būti matuojant akmeninį milžiną dykumoje. Tiesa, tiksliausiuose žemės matavimo darbuose (matuojant vadinamąsias „bazes") galima ir lauko sąlygomis pasiekti tokį pat tikslumą, kaip ir laboratorijoje, t. y. laiduoti šešių dešimtainių ženklų tikrumą. Bet, žinoma, matuojant piramidę tai yra neįmanomas dalykas. Be to, tikrųjų, pradinių piramidės dydžių tikrovėje seniai nebėra, nes pastato apdaras sudūlėjo, ir niekas nežino, kokio storio jis buvo. Sąžiningumas reikalauja piramidės matmenis imti sveikais metrais, o tada „pi" reikšmė gaunama gan apytikrė, nė kiek ne tikslesnė už tą, kuri seniai žinoma iš Rindo matematinio papiruso.

Jeigu piramidė iš tikrųjų yra skaičiaus „pi" įkūnijimas akmenyje, tai tas įkūnijimas, kaip matome, toli gražu ne tobulas. Tačiau galimas daiktas, kad piramidė nėra pastatyta kaip tik tam santykiui išreikšti. Jeigu piramidės matmenys imami apytikriais triženkliais skaičiais, visiškai galimos ir kitos prielaidos. Pavyzdžiui, galimas dalykas, kad piramidės aukštinei buvo paimta $^2/_3$ piramidės briaunos arba $^2/_3$ jos pagrindo įstrižainės. Galėjo būti panaudotas ir Herodoto nurodytas santykis: kad piramidės aukštinė yra kvadratinė šaknis iš šoninės plokštumos ploto. Visa tai — spėliojimai, tiek pat įtikimi, kaip ir „pi hipotezė".

2. Kitas teiginys liečia metų ilgumą ir Žemės spindulio ilgį: padaliję piramidės pagrindo kraštinę iš tikslaus metų ilgumo (skaičiaus iš septynių skaitmenų), gauname tiksliai 10 000 000-inę dalį Žemės ašies (skaičiaus iš penkių skaitmenų). Tačiau, jeigu mes jau žinome, kad dalijamajame yra ne daugiau kaip trys tikri skaitmenys, tai aišku, ko verti čia tie septyni ir penki ženklai daliklyje ir dalmenyje. Šiuo atveju aritmetika gali laiduoti tikrumą tiktai trijų skaitmenų metų ilgume ir Žemės spindulio ilgyje. 365 parų metai ir apie 6 400 *km* ilgio Žemės spindulys — štai skaičiai, apie kuriuos kalbėti čia turime teisę.

3. O kai dėl nuotolio nuo Žemės iki Saulės, tai čia yra kitokios rūšies nesusipratimas. Net keista, kaip teorijos šalininkai nepastebi jų pačių čia daromos logikos klaidos. Juk jeigu, kaip jie tvirtina, piramidės kraštinė yra lygi Žemės spindulio tam tikrai daliai, o aukštinė — tam tikrai pagrindo daliai, tai jau negalima kalbėti, kad ta pati aukštinė sudaro tam tikrą nuotolio iki Saulės dalį. Turi būti kas nors viena — arba tas, arba kitas. O jeigu čia atsitiktinai yra įdomus abiejų ilgių atitikimas, tai jis mūsų planetų sistemoje visuomet buvo, ir tai ne šventikų nuopelnas.

Nagrinėjamosios teorijos šalininkai eina dar toliau: jie tvirtina, kad piramidės masė yra lygi vienai tūkstantbilijoninei daliai Žemės rutulio masės. Šitas santykis, jų nuomone, negali būti atsitiktinis ir liudija tai, kad senovės egiptiečių šventikai žinojo ne tik geometrinį mūsų planetos didumą, bet ir žymiai anksčiau už Niutoną ir Kavendišą[1] apskaičiavo jos masę — „pasvėrė" Žemės rutulį.

Čia tas pats nelogiškumas, kaip ir pavyzdyje su nuotoliu tarp Žemės ir Saulės. Visiškai absurdiška kalbėti, kad esą piramidės masė „parinkta" tam tikru santykiu su Žemės rutulio mase. Piramidės masė savaime nusistatė, parinkus jos pagrindo ir aukštinės dydžius.

Negalima iš karto derinti piramidės aukštinę su pagrindu, kuris lygus tam tikrai Žemės spindulio daliai, ir nepriklausomai nuo to sieti jos masę su Žemės mase. Vienas santykis nustato kitą.

Reiškia, turi būti atmesti įvairūs prasimanymai apie tai, kad egiptiečiai žinojo Žemės rutulio masę. Tai yra ne kas kita, kaip skaitinė ekvilibristika.

Sumaniai operuojant skaičiais, remiantis atsitiktiniais sutapimais, galima įrodyti, ką tik nori.

Mes matome, kad legenda apie nepaprastą piramidės šventikų-architektų išsimokslinimą yra paremta labai silpnais argumentais.

Pakeliui trumpai parodysime to aritmetinio skyriaus, kuris nagrinėja apytikrius skaičius, naudingumą.

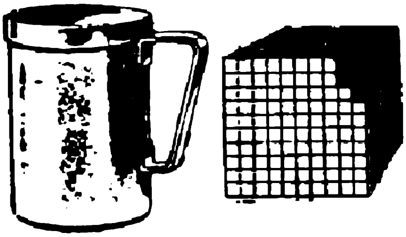
APYTIKRIAI SKAIČIAI

Nežinančiam apytikrių skaičių veiksmų taisyklių bus įdomu bent trumpai su jomis susipažinti, juo labiau kad šių paprastų metodų žinojimas yra ir praktiškai naudingas — skaičiuojant sutaupoma darbo ir laiko.

Pirmiausia paaiškinsime, kas yra apytikris skaičius ir iš kur tokie skaičiai gaunami.

Į techninius skaičiavimus įeinantieji duomenys yra gaunami matavimo keliu. Tačiau joks matavimas negali būti atliktas visiškai tiksliai. Visų pirma jau patys matavimams vartojami matai paprastai yra su paklaidomis. Pagaminti

[1] Henri Kavendišas (1731—1810) — anglų fizikas.



Gaminant litrinius matavimo puodelius, įstatymu leidžiama iki 5 *kub. cm* paklaida.

visiškai tikslias metrines liniuotes, kilograminį svarstį, litrinį puodelį yra nepaprastai sunku, ir todėl juos gaminant įstatymu leidžiamos tam tikros paklaidos. Pavyzdžiui, metrinei liniuotei įstatymu nustatoma paklaida iki 1 *mm*; 10 metrų žemės matavimo grandinei arba juostai — iki 1 *cm*; kilograminiam svarsčiui[1] — iki 1 *g*; 1 *g* svarsteliui — iki 0,01 *g*; litriniam puodeliui — iki 5 *kub. cm*.

Be to, matavimo atlikimas įneša dar netikslumų. Sakysime, jūs matuojate kokį nors atstumą, pavyzdžiui gatvės plotį. Matas, metras, jos plotyje, tarkim, išsiteko 13 kartų, ir dar liko mažesnis už metrą gabaliukas. Jūs galite sakyti, kad gatvės plotis yra 13 *m*; tačiau iš tikrųjų jis lygus 13 pilnų metrų ir dar kažkokiam skaičiui dešimtųjų, šimtųjų ir t. t. metro dalių, į kurias jūs neatsižvelgėte. Vadinasi, jūsų matavimo rezultatą galima atvaizduoti taip:

gatvės plotis — 13,??? *m*,

kur klaustukai pažymi mums nežinomus dešimtųjų, šimtųjų ir t. t. dalių skaitmenis.

Jeigu jūs norėtumėte gatvės plotį išmatuoti tiksliau, jūs sužinotumėte, kiek yra likusiame gabalėlyje decimetrų (dešimtųjų metro dalių). Tarkim, kad yra 8 decimetrai ir dar lieka gabaliukas, mažesnis už decimetrą. Naujojo matavimo rezultatas, 13,8 *m*, yra tikslesnis už pirmąjį, bet ir jis nėra griežtai tikslus, nes, be 8 dešimtųjų metro, į gatvės plotį įeina dar tam tikras mums nežinomas skaičius

[1] Be paklaidos svarsčiams, įstatymu leidžiama paklaida svarstyklių įtaisyme; pastaroji, pavyzdžiui, stalo svarstyklėse yra leidžiama iki 1 *g* kiekvienam sveriamo krūvio kilogramui.

šimtųjų, tukstantųjų ir t. t. metro dalių. Vadinasi, dabar gautąjį tikslesnį rezultatą galime išreikšti taip:

13,8?? *m.*

Dar kruopščiau matuodami, jūs atsižvelgsite į šimtąsias metro dalis (centimetrus) atmestoje liekanoje, bet vėl neįskaitysite liekanos, mažesnės už centimetrą; reiškia, ir pastarasis rezultatas nebus absoliučiai tikslus. Aplamai, kaip rūpestingai jūs bematuotumėte, niekuomet negalėsite būti visiškai tikri, kad už paskutinio jūsų gauto skaitmens jau nėra kitų, jums nežinomų, skaitmenų.

Reikalas, žinoma, nė kiek nepasikeičia nuo to, kad matuojant liekanos, didesnės už mato vieneto pusę, paprastai laikomos sveikais vienetais. Jeigu matuodami gatvę pirmą kartą jos plotį būtume laikę ne 13 *m,* bet 14, — tai būtų buvęs taip pat tiktai apytikris rezultatas. Jį būtų galima išreikšti taip:

14,??? *m,*

kur klaustukai pažymi neigiamus skaitmenis (t. y. parodo, per kiek dešimtųjų, šimtųjų ir t. t. dalių skaičius 14 yra didesnis už tikrąjį gatvės plotį).

Tokiu būdu, net kruopščiausio matavimo rezultatas negali būti laikomas visiškai tiksliu: jis išreiškia tikrąjį dydį tiktai daugiau arba mažiau apytikriai. Tokie skaičiai vadinami apytikriais.

Apytikrių skaičių aritmetika ne visais atžvilgiais panaši į tiksliųjų skaičių aritmetiką. Jų skirtumą parodysime pavyzdžiu.

Sakysime, reikia apskaičiuoti plotą stačiakampio sklypo, kurio ilgis 68 *m,* o plotis 42 *m.* Jeigu skaičiai 68 ir 42 būtų tikslūs, sklypo plotas būtų lygus tiksliai

$$68 \times 42 = 2856 \textit{ kv. m.}$$

Bet skaičiai 68 ir 42 yra ne tikslūs, o apytikriai: ilgis nėra lygus 68 *m,* o truputį didesnis arba mažesnis, nes neįtikima, kad metras jame tilptų tiksliai 68 kartus. Be to, ir pats metrinės liniuotės ilgis vargu ar buvo tiksliai lygus 1 *m*. Sutinkamai su tuo, ką aukščiau rašėme, sklypo ilgį galime išreikšti metrais šitaip:

68,?

Panašiu būdu išreiškiame ir sklypo plotį:

42,?

Dabar apytikrius skaičius sudauginkime:

68,? $\times$ 42,?

Veiksmą atliekame pagal šią schemą:

$$\begin{array}{r} \times\begin{array}{r}68,?\\ 42,?\end{array}\\ \hline ?\,?\,?\\ 136?\\ 272?\\ \hline 285?,?\,?\end{array}$$

Matome, kad ketvirtasis rezultato skaitmuo yra mums nežinomas: jis turi būti gautas sudėjus tris skaitmenis (? + 6 + ?), iš kurių du nežinomi. Nepatikimas taip pat ir trečiasis rezultato skaitmuo. Mes parašėme 5, bet juk sudėjus stulpelį ? + 6 + ? gali būti gautas skaičius, didesnis už 10 ir net 20; reiškia, vietoje 5 gali būti ir 6, ir 7. Visiškai patikimi yra tiktai pirmieji du rezultato skaitmenys (28). Todėl, norėdami būti sąžiningais, turime tvirtinti tiktai, kad ieškomasis plotas yra apie 28 šimtus kvadratinių metrų. Kokie dešimčių ir vienetų skaitmenys bendrame kvadratinių metrų skaičiuje, mes nežinome.

Taigi, teisingas atsakymas į uždavinio klausimą — 2800, kur nuliai reiškia ne tikrąjį atitinkamų skyrių vienetų nebuvimą, o tiktai patikimų žinių apie juos nebuvimą. Čia nuliai reiškia tą patį, ką ankstesniuose pažymėjimuose klaustukai.

Klaidinga galvoti, kad atsakymas 2856, gautas pagal tiksliųjų skaičių aritmetikos taisykles, yra teisingesnis už

2800. Nė kiek: juk mes matėme, kad paskutiniai du rezultato skaitmenys (56) yra nepatikimi: laiduoti jų tikrumo negalima. Atsakymas 2800 yra pranašesnis už 2856, nes jis neklaidina — jis tiesiog tvirtina, kad patikimi yra tiktai skaitmenys 2 ir 8, esantieji tūkstančių ir šimtų vietoje, o kokie skaitmenys eina toliau — nežinia. O atsakymas 2856 apgaulingas: jis teigia neteisingą mintį, esą paskutiniai du skaitmenys yra tokie pat patikimi, kaip ir du pirmieji.

„Nesąžininga rašyti daugiau skaitmenų, negu tiek, už kiek galima laiduoti... Man labai liūdna prisipažinti, kad nemaža tokių skaičių, duodančių klaidingą supratimą, yra geriausiuose veikaluose apie garo mašinas. Kai aš mokiausi mokykloje, mums buvo pasakyta, kad vidutinis nuotolis nuo Žemės iki Saulės yra 95 142 357 anglų mylios [1]. Aš stebiuosi, kodėl nebuvo nurodyta, kiek dar pėdų ir colių. Tiksliausi šių laikų matavimai leidžia tiktai teigti, kad šitas nuotolis ne didesnis kaip 93 ir ne mažesnis kaip 92,5 milijono mylių“, — rašė aukščiau minėtu klausimu anglų mokslininkas Peri.

Taigi, skaičiuojant su apytikriais skaičiais, reikia kreipti dėmesį ne į visus, o tiktai į kai kuriuos rezultato skaitmenis. Išsiaiškinsime klausimą, kaip reikia apvalinti skaičius.

SKAIČIŲ APVALINIMAS

Apvalinti skaičius skaičiuojant reiškia vieną arba kelis skaitmenis jo gale pakeisti nuliais. Kadangi po kablelio esą nuliai neturi reikšmės, jie visiškai atmetami. Pavyzdžiui:

skaičiai	*apvalinami iki*
3734	3730 arba 3700
5,314	5,31 arba 5,3
0,00731	0,0073 arba 0,007

[1] Anglų mylia lygi 1852 *m*.

Jeigu pirmasis iš apvalinant atmetamų skaitmenų yra 6 arba didesnis, tai prieš jį paliekamas skaitmuo padidinamas vienetu. Pavyzdžiui:

skaičiai	*apvalinami iki*
4867 .	4870 arba 4900
5989	5990 arba 6000
3,666	3,67 arba 3,7

Taip pat daroma, jei atmetamas skaitmuo 5 su po jo einančiais reikšmingais skaitmenimis. Pavyzdžiui:

skaičiai	*apvalinami iki*
4552	4600
38,1506 .	38,2

Bet jei atmetamas tiktai skaitmuo 5, tai prieš jį esantį skaitmenį padidinti vienetu sutarta tik tuomet, kai jis nelyginis; o lyginis skaitmuo paliekamas nepakeistas. Pavyzdžiui:

skaičiai	*apvalinami iki*
735	740
8645 . .	8640
37,65 .	37,6
0,0275	0,028
70,5	70 *

Apdorojant veiksmų su apytikriais skaičiais rezultatus, reikia vadovautis tomis pačiomis apvalinimo taisyklėmis.

REIKŠMINGI IR NEREIKŠMINGI SKAITMENYS

Apytikrių skaičiavimų moksle reikšmingais skaitmenimis laikomi visi skaitmenys, išskyrus nulį, o taip pat ir nulis, kai jis yra tarp kitų reikšmingų skaitmenų. Antai, skaičiuose 3700 ir 0,0062 visi nuliai — nereikšmingi skaitmenys, o skaičiuose 105 ir 2006 nuliai — reikšmingi. Skaičiuje 0,0708 pirmieji du nuliai — nereikšmingi, o trečiasis nulis — reikšmingas skaitmuo.

---

* Nulis yra laikomas lyginiu skaitmeniu.

Kai kuriais atvejais reikšmingas nulis gali būti ir skaičiaus gale, pavyzdžiui, apvalindami skaičių 2,540002, gauname skaičių 2,54000, kuriame visi galiniai nuliai — reikšmingi, nes jie parodo tikrąjį vienetų nebuvimą atitinkamuose skyriuose. Todėl, jei uždavinio sąlygoje arba lentelėje randame skaičius 4,0 arba 0,80, tai privalome juos vertinti kaip dviženklius. Apvalindami skaičių 289,9 iki 290, pabaigoje gauname taip pat reikšmingą nulį.

APYTIKRIŲ SKAIČIŲ SUDĖTIS IR ATIMTIS

Apytikrių skaičių sudėties arba atimties rezultatai neturi baigtis reikšmingais skaitmenimis tuose skyriuose, kurių nėra bent viename iš duotų skaičių. Jeigu tokie skaitmenys buvo gauti, juos reikia atmesti apvalinimo būdu.

$$\begin{array}{r} 3400 \\ +\ 275 \\ \hline 3700 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 28{,}3 \\ +\ 146{,}85 \\ 108 \\ \hline 283 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 176{,}3 \\ -\ 0{,}46 \\ \hline 175{,}8 \end{array}$$

(bet ne 3675) (bet ne 283,15) (bet ne 175,84)

Nesunku suprasti šitos taisyklės pagrindą. Pavyzdžiui, prie 3400 *m* reikia pridėti 275 *m*. Matuotojas skaičiuje 3400, matyt, nepaisė metrų dešimčių; aišku, kad, pridėję prie šito skaičiaus 7 dešimtis metrų ir dar 5 *m*, sumoje gausime ne 3675 *m*, bet, greičiausiai, rezultatą su kitokiais skaitmenimis dešimčių ir vienetų vietose. Todėl sumoje dešimčių ir vienetų vietose rašome nulius, kurie šiuo atveju parodo, kad skaičiuotojui nežinoma, kokie būtent skaitmenys čia turi būti.

APYTIKRIŲ SKAIČIŲ DAUGYBA, DALYBA IR KĖLIMAS LAIPSNIU

Apytikrių skaičių daugybos, o taip pat dalybos rezultatuose neturi būti daugiau reikšmingų skaitmenų, negu yra jų trumpesniajame duomenyje (iš dviejų skaičių „trumpesnis" yra tas, kuriame yra mažiau *reikšmingų* skaitmenų). Kiti skaitmenys pakeičiami nuliais.

Pavyzdžiai:

$$\begin{array}{r} \times\begin{array}{r} 37 \\ 245 \end{array} \\ \hline 9100 \end{array}$$

(bet ne 9065)

57,8 : 3,2 = 18 (bet ne 18,06);
25 : 3,14 = 8,0 (bet ne 7,961).

Skaičiuojant skaitmenų skaičių, į kablelį dėmesys nekreipiamas: pavyzdžiui, 4,57 yra triženklis skaičius ir pan.

Apytikrio skaičiaus laipsnio reikšmingų skaitmenų skaičius neturi viršyti jų skaičiaus laipsnio pagrinde. Kiti skaitmenys pakeičiami nuliais.

Pavyzdžiai:

$157^2 = 24\,600$ (bet ne 24 649);
$5{,}81^3 = 196$ (bet ne 196,122941).

PRITAIKYMAS PRAKTIKOJE

Šios taisyklės liečia tiktai galutinius rezultatus. Jeigu skaičiavimas nesibaigia tuo atliekamu veiksmu, tai šitokio tarpinio veiksmo rezultate paliekame vienu reikšmingu skaitmeniu daugiau, negu taisyklės reikalauja. Pavyzdžiui, skaičiuojant

$$\frac{36 \times 1{,}4}{3{,}4},$$

daroma taip:

$36 \times 1{,}4 = 50{,}4$ (paliekami ne du, bet trys skaitmenys);
$50{,}4 — 3{,}4 = 15.$

Nesudėtinguose techniniuose skaičiavimuose aukščiau minėtos taisyklės beveik visais atvejais panaudojamos tokiu supaprastintu pavidalu. Prieš pradedant skaičiavimus, iš trumpiausio duomens skaitmenų skaičiaus nustatoma, kiek patikimų skaitmenų gali būti galutiniame rezultate. Kai tai yra išaiškinta, pradedama skaičiuoti, visuose tarpiniuose skaičiavimuose paliekama vienu skaitmeniu daugiau, negu nustatyta galutiniam rezultatui.

Pavyzdžiui, jeigu uždavinio sąlygoje duoti keli triženkliai ir vienas dviženklis skaičius, tai galutiniame rezultate bus *du* patikimi skaitmenys, o tarpinius rezultatus reikia imti su *trimis* skaitmenimis.

Tokiu būdu, visos apytikrių skaičiavimų taisyklės čia gali būti suvestos į dvi tokias:

1) nustatoma, kiek reikšmingų skaitmenų yra trumpiausiajame iš uždavinio duomenų: *tiek pat* reikšmingų skaitmenų reikės palikti *galutiniame* rezultate;

2) visų tarpinių skaičiavimų rezultate paliekama *vienu skaitmeniu daugiau*, negu nustatyta galutiniam rezultatui.

Kiti skaičiai visais atvejais pakeičiami nuliais arba atmetami pagal apvalinimo taisykles.

Šitos taisyklės nepritaikomos tiems uždaviniams (jie retai pasitaiko), kuriuos sprendžiant reikia atlikti *tiktai* sudėties ir atimties veiksmus. Tokiais atvejais reikia laikytis kitos taisyklės.

Galutiniame rezultate negali būti reikšmingų skaitmenų tuose skyriuose, kurių nėra bent viename iš apytikrių duomenų. Tarpiniuose rezultatuose reikia palikti vienu reikšmingu skaitmeniu daugiau, negu nustatyta galutiniam rezultatui. Kiti skaitmenys atmetami apvalinant.

Pavyzdžiui, jei uždavinio duomenys yra tokie:

$$37{,}5\ m,\ 185{,}64\ m,\ 0{,}6725\ m$$

ir sprendimas reikalauja atimti pirmąjį skaičių iš kitų dviejų sumos, tai sumoje

$$\begin{array}{r} +\,185{,}64 \\ 0{,}6725 \\ \hline 185{,}3125 \end{array}$$

kaip *tarpiniame* rezultate, atmetama paskutinis skaitmuo (t. y. imama 186,312), o skirtume

$$\begin{array}{r} -\,186{,}312 \\ 37{,}5 \\ \hline 148{,}812 \end{array}$$

kaip *galutiniame* rezultate, paliekama tiktai 148,8.

SKAIČIAVIMO DARBO TAUPYMAS

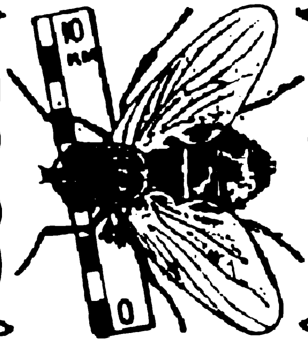
Kaip įvertinti, kiek skaičiavimo darbo sutaupome, naudodami čia išdėstytus metodus? Norint tai sužinoti, reikia kokį nors sudėtingą skaičiavimą atlikti dvejopai: vieną kartą — pagal įprastines aritmetines taisykles, kitą — apytikriai. O po to kantriai apskaičiuoti, kiek kartų vienaip ir antraip skaičiuojant teko atskirus skaitmenis sudėti, atimti ir dauginti. Pasirodo, kad apytikriai skaičiuojant tokių elementarinių operacijų reikia atlikti $2^1/_2$ karto mažiau, negu skaičiuojant „tiksliai". O rezultato teisingumas, skaičiuojant apytikriai, yra toks pat.

Taigi, apytikriai skaičiavimai reikalauja maždaug $2^1/_2$ karto mažiau laiko, negu skaičiavimai įprastinėmis taisyklėmis. Tačiau, tai dar ne visas laiko sutaupymas, kuris šiuo atveju pasiekiamas. Juk kiekviena bereikalinga skaičiavimo operacija, kiekvienas bereikalingas skaitmenų sudėties, atimties ar daugybos veiksmas yra papildoma proga klaidai padaryti. Apytikriuose skaičiavimuose tikimybė padaryti klaidą yra $2^1/_2$ karto mažesnė, negu „tiksliuosiuose". O užtenka nors kartą apsirikti — ir skaičiavimą reikės atlikti iš naujo, jei ne visą, tai bent dalį jo. Reiškia, bet kuriuo atveju apytikriuose skaičiavimuose laiko ir darbo išeikvojama $2^1/_2$ karto mažiau. Laikas, sunaudotas šių skaičiavimų besimokant, labai greitai ir gausiai atlyginamas.

ARITMETINIAI KURIOZAI

Daugyba = atimčiai

$$1 \times {}^1/_2 = 1 - {}^1/_2$$
$$6 \times {}^6/_7 = 6 - {}^6/_7$$
$${}^1/_2 \times {}^1/_3 = {}^1/_2 - {}^1/_3$$
$${}^1/_3 \times {}^1/_4 = {}^1/_3 - {}^1/_4$$



DEVINTASIS SKYRIUS

SKAIČIAI MILŽINAI

KAIP DIDELIS MILIJONAS?

Kas nepakankamai aiškiai įsivaizduoja milijono ir milijardo didumą, tas nepilnutinai įsisąmonina mūsų socialistinės statybos milžiniškus pasiekimus, išreiškiamus milijoniniais ir milijardiniais skaičiais.

Norint pajusti panašių skaičių milžiniškumą, verta paskirti truputį laiko „aritmetinei gimnastikai“, vystančiai sugebėjimą teisingai vertinti didelių skaičių tikruosius dydžius.

Pradėsime nuo milijono — seniausio skaičiaus milžino (pirmą kartą milijono pavadinimas pasirodė 1500 metais Italijoje).

Jeigu norite pajusti milijono tikrąjį dydį, pabandykite, pavyzdžiui, švariame sąsiuvinyje padėti *milijoną taškų*. Aš nesiūlau jums šito darbo varyti iki galo (vargu ar užteks kam nors kantrybės); jau viena darbo pradžia, lėta jo eiga leis jums pajusti, kas yra „tikrasis“ milijonas.

MILIJONAS SEKUNDŽIŲ

Čia aš siūlau kiekvienam prieinamą būdą kuo aiškiau įsivaizduoti milijono dydį. Tuo tikslu reikia pasitreniruoti mintinai apskaičiuoti milijoną smulkių, bet gerai mums pažįstamų daiktų — žingsnių, minučių, degtukų, stiklinių ir pan. Dažnai gaunami nelaukti ir stebinantieji rezultatai. Štai keletas pavyzdžių.

Kiek laiko reikėtų suskaičiuoti milijonui kokių nors daiktų, skaičiuojant po vieną per sekundę?

Pasirodo, kad, skaičiuodami be pertraukos po 10 valandų per parą, skaičiavimą užbaigtumėte tiktai po mėnesio. Apytikriai tuo įsitikinti nesunku paskaičiavus mintinai: valanda turi 3600 sekundžių, 10 valandų — 36000; vadinasi, per tris paras jūs suskaičiuotumėte iš viso apie 100 000 daiktų, o kadangi milijonas yra 10 kartų didesnis, tai suskaičiuoti iki jo reikės 30 dienų [1].

Iš čia, tarp kitko, gaunama, kad aukščiau pasiūlytasis darbas — padėti sąsiuvinyje milijoną taškų — pareikalautų daugelio savaičių atkakliausio ir nuolatinio triūso.

MILIJONĄ KARTŲ STORESNIS UŽ PLAUKĄ

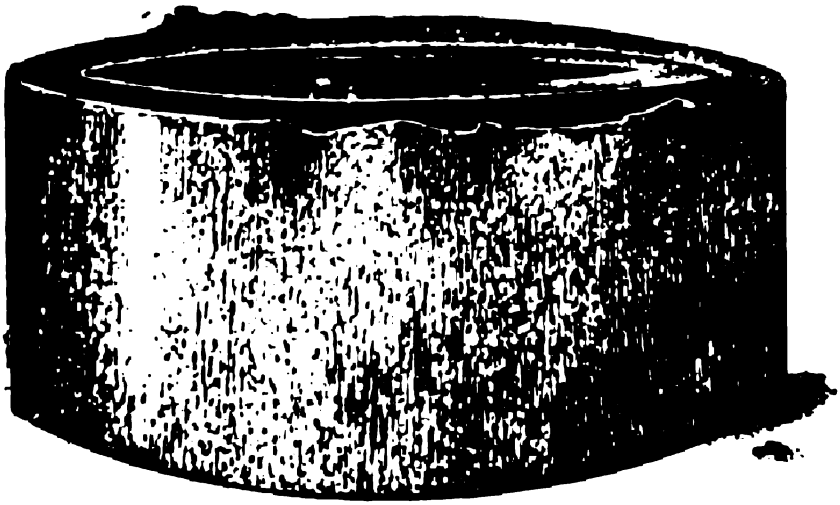
Plauko plonumas tapo vos ne priežodžiu. Visi plauką dažnai mato ir gerai žino, koks jis plonas.

Žmogaus plauko storis — apie 0,07 *mm*. Kad būtų patogiau skaičiuoti, jį apvalinsime iki 0,1 *mm*. Įsivaizduokite, kad greta vienas kito guli milijonas plaukų. Kokio pločio juosta tada bus? Ar galima būtų, pavyzdžiui, ją pratempti tarp durų staktų?

Jeigu jūs niekuomet negalvojote apie panašų uždavinį, tai galima laiduoti, kad, neatlikę skaičiavimų, duosite labai neteisingą atsakymą. Ko gero jūs net ginčysite teisingą

---

[1] Pastebėsime, kad metuose (astronominiuose) yra 31 558 150 sekundžių; milijonas sekundžių yra tiksliai lygus 11 parų 13 valandų 46 minutėms 40 sekundžių.



Automobilis „Pobeda“ (dešinėje apačioje) greta žmogaus plauko atkarpos, padidintos milijoną kartų.

atsakymą — jis pasirodys toks nepanašus į tiesą. Koks gi jis?

Pasirodo, kad milijoną kartų padidintas plaukas būtų apie šimto metrų skersmens. Tai atrodo neįtikėtina, tačiau pasistenkite paskaičiuoti, ir įsitikinsite, kad taip ir yra:

$$0{,}1\ mm \times 1\,000\,000 = 0{,}1\ m \times 1000 = 0{,}1\ km = 100\ m\ *.$$

PRATIMAI SU MILIJONU

Atlikite — geriausia mintinai — dar eilę pratimų, kad gerai įsisavintumėte milijono dydį.

1. Visiems žinoma, kad paprasta kambarinė musė yra maždaug 7 *mm* ilgio. Tačiau kokio ilgio ji būtų padidinta milijoną kartų?

* Daugybą čia atlikome šiuo būdu: užuot padauginę skaičių, du kartus pakeitėme patį mato vienetą kitu, tūkstantį kartų didesniu. Šitas būdas yra labai patogus mintiniuose skaičiavimuose, ir juo reikia naudotis skaičiavimuose su metriniais matais.

S p r e n d i m a s.

Padauginę 7 *mm* iš 1 000 000, gauname 7 *km* — maždaug Vilniaus plotį. Reiškia, milijoną kartų padidinta musė galėtų savo kūnu uždengti sostinės dydžio miestą.

2. Mintyse padidinkite milijoną kartų savo kišeninį laikrodį (jo plotį) — ir vėl gausite pritrenkiantį rezultatą; nepaskaičiavus vargu ar pavyks jį įspėti. Koks?

S p r e n d i m a s.

Laikrodis būtų 50 kilometrų pločio, o kiekvienas skaitmuo tęstųsi per visą geografinę mylią (7 *km*).

3. Kokio ūgio būtų milijoną kartų padidintas žmogus?

S p r e n d i m a s.

1700 kilometrų. Jis būtų tik 8 kartus mažesnis už Žemės rutulio skersmenį. Tiesiog vienu žingsniu jis galėtų nužengti iš Leningrado į Maskvą, o atsigulęs išsitiestų nuo Suomijos įlankos iki Krymo...

Duodu dar visą eilę gatavų tokios rūšies apskaičiavimų. Juos patikrins pats skaitytojas.

M i l i j o n a s ž m o n i ų, išrikiuotų vienoje eilėje petys į petį, nusitęstų per 500 *km*.

Spaustuvinio šrifto — pavyzdžiui šitos knygos — m i l i j o n a s t a š k ų, padėtų visiškai šalia vienas kito, išsitiestų šimtų metrų ilgio linija.

Milijoną kartų padidintas žmogus vos išsitenka tarp Juodosios ir Baltijos jūrų.

Pasėmus milijoną kartų siuvamuoju pirščiuku, galima išsemti apie toną vandens.

Milijono puslapių knyga būtų 50 *m* storumo.

Milijonas raidžių yra glaustai atspausdintoje 600—800 vidutinio formato puslapių knygoje.

Milijonas dienų — daugiau kaip 27 šimtmečiai. Nuo mūsų eros pradžios dar nepraėjo milijonas dienų!

TARYBINĖS DABARTIES SKAIČIAI MILŽINAI

Skaitydami mūsų laikraščius, skaičius milžinus sutinkame kiekviename žingsnyje, ir kas negali teisingai susivokti tarp tų skaičių, tam nesuprantamas tikrasis socialistinės statybos mastas ir užmojis. Pavyzdžiui, imkime skaičius, apibūdinančius mūsų liaudies švietimą. VLKJS X suvažiavime A. A. Andrejevas pažymėjo:

„1936 metais pradinių ir vidurinių mokyklų mokinių skaičius bus 27 935 900 žmonių".

Jeigu jūs nepamėginsite šito skaičiaus įsisąmoninti konkrečiais palyginimais, jis taip ir liks jūsų atmintyje negyva aštuonių skaitmenų eilute.

Tačiau įsivaizduokite, kad 28 milijonai mokinių išrikiuoti į vieną eilę, po tris vieno metro ilgyje, — ir su nuostaba sužinosite, kad tokia eilė nusitęstų beveik per 10 000 *km*, t. y. vos tilptų mūsų šalies neaprėpiamose platybėse ir beveik galėtų sujungti polių su pusiauju. O susikibusi rankomis, tarybinių mokinių armija sudarytų grandinę, kuri apjuostų Žemės rutulį ties pusiauju.

Tais pačiais, 1936 metais šiai mokinių armijai buvo numatyta išleisti 156 milijonus egzempliorių vadovėlių. Pabandykime įsivaizduoti šitą, jokioje kitoje šalyje neregėtą, mokymo knygų išleidimą. Sakysim, kad visos 156 milijonai knygų yra sukrautos viena ant kitos. Apskaičiuokime tokiu būdu sudaryto stulpo aukštį. Laikydami, kad vieno vadovėlio storis yra vidutiniškai tiktai 1 *cm*, gauname daugiau kaip 1500 *km* aukščio stulpą. Stulpas kiaurai praskros visą

Žemės atmosferą, per 1000 kilometrų išsikišdamas virš jos praretintų sluoksnių ribos ir iškildamas virš kietos žemės per ketvirtį mūsų planetos spindulio.

Paimkime dar vieną pavyzdį — iš socialistinio žemės ūkio srities. 1935 metų gruodžio mėnesį kombainininkų pasitarime J. V. Stalinas savo kalboje pasakė:

„Šiais metais mes surenkame daugiau kaip penkis su puse milijardo pūdų grūdų".

Milijardas — tai tūkstantis milijonų, 1 000 000 000. Mes dar pakalbėsime apie šitą aukščiausio rango skaičių milžiną; o kol kas pamėginsime įsivaizduoti 1935 metų grūdų derlių Tarybų Sąjungoje. Pūdą (16 *kg*) sveriantis grūdų maišelis yra 30—40 centimetrų pločio.

Įsivaizduokime 5500 milijonų tokių maišų, suguldytų į vieną eilę. Kokio ilgio būtų ši eilė? Sunku patikėti: ja būtų galima 5 kartus sujungti Žemę ir Mėnulį! Skaičiavimas visai nesudėtingas, ir todėl lengvai galite patikrinti jo teisingumą. Į kiekvieno metro ilgį galima paguldyti tris maišus; 5500 milijonų maišų padaliję iš 3, apytikriai skaičiuodami, gauname 1800 milijonų. Toks maišų eilės ilgis metrais; pavertę kilometrais, gauname 1 800 000 *km;* nuo Žemės iki Mėnulio yra iš viso 380 000 *km,* t. y. beveik penkis kartus mažiau. Pridėsime dar, kad visiems tiems maišams suskaičiuoti, skaičiuojant kas sekundė po vieną, prireiktų 170 metų nepertraukiamo darbo...

SKAIČIŲ MILŽINŲ PAVADINIMAI

Mes ką tik kalbėjome apie milijonus. Prieš pereidami prie dar didesnių skaičių gigantų — milijardų, bilijonų, trilijonų ir t. t., trumpai sustokime ties jų pavadinimais. Žodį „milijonas" supranta visi vienodai: tūkstantis tūkstančių. Tačiau žodžiai bilijonas, trilijonas ir t. t. yra palyginti neseniai sugalvoti ir dar neįgijo vieningos reikšmės. Finansiniuose skaičiavimuose ir kasdieninėje praktikoje pas mus priimta bilijonu vadinti t ū k s t a n t į m i l i j o n ų, o trilijonu — milijoną milijonų. Tačiau astronomijos ir fizikos knygose šituos pavadinimus sutiksite kita prasme: čia bilijonas reiškia ne tūkstantį, o milijoną milijonų, trilijonas — milijoną milijonų milijonų, kvadrilijonas — milijoną milijonų milijonų milijonų ir t. t. Trumpiau sakant: mokslinėse knygose kiekvieną naują aukštesnį pavadinimą priimta duoti milijonui žemesniųjų, o finansiniuose skaičiavimuose ir kasdieninėje praktikoje — tūkstančiui žemesniųjų.

Žemiau duodama lentelė aiškiai parodo minėtą skirtumą.

Kasdieninėje praktikoje ir finansiniuose skaičiavimuose	kvintilijonai	kvadrilijonai	trilijonai	bilijonai (=milijardai)	milijonai	tūkstančiai	vienetai
	0	000	000	000	000	000	000
Astronomijoje ir fizikoje	trilijonai		bilijonai	milijardai	milijonai		

Matote, kad fizikas arba astronomas bilijonu vadina tai, ką finansistas vadina trilijonu, ir t. t., ir, norint išvengti nesusipratimų, visada reikia prie pavadinimų rašyti ir skaitmenis. Tai bene vienintelis atvejis praktikoje, kai sumos nurodymas žodžiais ne paaiškina, o sukomplikuoja tai, kas parašyta skaitmenimis. Jūs taip pat matote, kad astronomai ir fizikai žymiai ekonomiškiau naudoja naujus pavadinimus, negu finansistai, kuriems, tarp kitko, nėra ko šiuo atžvilgiu ypatingai šykštauti, nes jiems beveik netenka susidurti su didesniais kaip 12 ženklų skaičiais; o moksle ir 20 ženklų skaičiai — nereti svečiai [1].

[1] Pažymėtina, beje, kad labai didelių skaičių įprastiniai skaitmeniniai pažymėjimai ir jų pavadinimai vartojami tiktai populiariose knygose; o mokslinėse knygose — fizikos ir astronomijos — paprastai

MILIJARDAS

Milijardas — jauniausias tarp skaičių pavadinimų. Jį vartoti pradėta tiktai po prancūzų-prūsų karo (1871 m.), kai prancūzai turėjo sumokėti Vokietijai 5 000 000 000 frankų kontribuciją. Žodis „milijardas“, kaip ir „milijonas“, yra kilęs iš šaknies — tūkstantis — ir yra itališkoji šito daiktavardžio didinamoji forma. Kad įsivaizduotumėte, kokie didžiuliai yra milijardai, žinokite, kad jūsų dabar skaitomoje knygelėje yra truputį daugiau kaip 200 000 raidžių. Šitokiose penkiose knygelėse bus milijonas raidžių. O milijardas raidžių bus 5000 šitos knygelės egzempliorių krūvoje. Tokia tvarkingai sukrauta krūva sudarytų Isakijaus soboro aukštumo stulpą.

Viename kubiniame metre yra kubinių milimetrų lygiai vienas milijardas (1000 × 1000 × 1000). Paskaičiuokime, kokio aukščio stulpą gautume, visus tuos smulkučius milimetrinius kubelius sukrovę vieną ant kito. Rezultatas yra pritrenkiantis — 1000 *km*!

M i l i j a r d a s m i n u č i ų sudaro daugiau kaip 19 šimtmečių; žmonija tiktai prieš 50 su trupučiu metų pradėjo skaičiuoti antrąjį milijardą minučių nuo pirmosios mūsų eros dienos.

BILIJONAS IR TRILIJONAS

Milžinas milijonas greta milžinų milžino bilijono yra toks pat nykštukas, kaip vienetas greta milijono. Šį tarpusavio santykį mes paprastai pamirštame, ir savo vaizduotėje nedarome didelio skirtumo tarp milijono, bilijono ir trilijono. Šiuo atveju mes panašūs į tuos pirmykščius

---

vartojami kiti žymėjimo būdai: bilijonas žymimas 10^{12}, trilijonas — 10^{18}, 27 tūkstančiai bilijonų $27 \cdot 10^{15}$ ir t. t. Tokiu būdu žymint, sutaupoma vietos, ir, be to, su tokiais skaičiais lengviau atlikti įvairius veiksmus (pagal algebros nagrinėjamas taisykles).

žmones, kurie moka skaičiuoti tiktai iki 2 arba iki 3, o visus didesnius skaičius pažymi žodžiu d a u g.

„Panašiai, kaip botokudams[1] atrodo nereikšmingas skirtumas tarp dviejų ir trijų, taip ir daugeliui dabartinių kultūringų žmonių atrodo nereikšmingas skirtumas tarp bilijono ir trilijono, — kalba vienas matematikas. — Mažų mažiausia, jie nepagalvoja, kad vienas iš tų skaičių yra milijoną kartų didesnis už kitą ir kad, reiškia, pirmojo santykis su antruoju yra apytikriai toks pat, kaip atstumo tarp Maskvos ir San-Francisko santykis su gatvės pločiu“.

B i l i j o n ą kartų padidintas plauko storis būtų aštuonis kartus platesnis už Žemės rutulį, o tiek pat kartų padidinta musė būtų 70 kartų storesnė už Saulę!

Tarpusavio santykį tarp milijono, bilijono ir trilijono galima gana gerai įsivaizduoti šitokiu būdu. Įsivaizduokite ilgą tiesią eilę miestų, kurių kiekviename gyvena po milijoną gyventojų, — visą milijoną miestų: tokioje grandinėje, nusidriekusioje per kelis milijonus kilometrų, bus b i l i j o n a s gyventojų... Dabar įsivaizduokite, kad prieš jus ne viena tokia miestų eilė, bet visas milijonas, t. y. kvadratas, kurio kiekviena kraštinė susideda iš milijono tokių miestų ir kuris viduje ištisai užstatytas tokiais miestais: tokiame kvadrate bus t r i l i j o n a s gyventojų.

Vienu t r i l i j o n u p l y t ų, dedant jas ant kieto Žemės rutulio paviršiaus glaudžiu sluoksniu, būtų galima padengti visus žemynus ištisiniu beveik keturaukščio namo aukštumo klodu.

Jeigu visos abiejų dangaus pusrutulių žvaigždės, matomos pro stipriausius teleskopus, t. y. apytikriai 500 milijonų žvaigždžių, būtų apgyventos taip, kaip mūsų Žemė, tai visose šitose žvaigždėse būtų „tiktai“ t r i l i j o n a s žmonių.

---

[1] B o t o k u d a i — indėnų padermė, gyvenusi negausiomis grupėmis Rytų Brazilijoje.

Paskutinę iliustraciją paimsime iš smulkiausių dalelių pasaulio — molekulių pasaulio. Molekulės skersmuo yra maždaug milijoną kartų mažesnis už šitos knygos spaustuvinio šrifto taško skersmenį. Įsivaizduokite trilijoną tokių molekulių, suvertų ant vieno siūlo. Kokio ilgio būtų šitas siūlas? Juo būtų galima septynis kartus apvynioti Žemės rutulį ties pusiauju!

Kiekviename kubiniame centimetre oro (t. y. maždaug siuvamajame pirščiuke) yra nuo 20 iki 30 trilijonų molekulių. Kaip didelis yra šitas skaičius, matyti, tarp kitko. iš to, kad, pasiekę tobuliausių oro siurblių pagalba aukščiausią išretinimo laipsnį — praretinę 100 milijardų kartų — kiekviename kubiniame centimetre vis tiek turėsime iki 270 milijonų molekulių! Tiesiog nežinai, kuo daugiau stebėtis: ar milžinišku molekulių gausumu, ar neįsivaizduojamu jų mažumu...

KVADRILIJONAS

Mūsų jau ne kartą minėtoje Magnickio „Aritmetikoje" yra skaičių klasių pavadinimų lentelė, kurioje duoti skaičių pavadinimai iki kvadrilijono, t. y. vieneto su 24 nuliais [1].

Tai buvo didelis žingsnis pirmyn, palyginus su senesniuoju mūsų protėvių skaitiniu inventoriumi. Senieji slaviškieji didelių skaičių laiptai buvo iki XV amžiaus žymiai kuklesni ir siekė tiktai 100 milijonų. Štai toji senovinė numeracija:

«тысяча»	1 000
«тьма»	10 000
«легион»	100 000
«леодр»	1 000 000
«вран»	10 000 000
«колода»	100 000 000

---

[1] Magnickis laikėsi tos skaičių klasifikacijos, kuri naują pavadinimą duoda kiekvienam žemesnių vienetų milijonui (bilijonas — milijonas milijonų, ir t. t.).

Magnickis savo lentelėje plačiai praplėtė senąsias didelių skaičių ribas. Tačiau jis manė, kad skaičių milžinų pavadinimų sistemą vystyti perdaug toli praktiškai nėra reikalo. Tuoj po lentelės dedamomis eilėmis senovės matematikas dėstė: kadangi žmogaus protas negali aprėpti begalinės skaičių eilės, tai nėra prasmės sudarinėti skaičius didesnius, negu duoti jo lentelėje — „mūsų protų ribose". Jo nuomone, į ją įeinančių skaičių (nuo vieneto iki kvadrilijonų imtinai) pakanka suskaičiuoti visiems matomojo pasaulio daiktams, — kiekvienam, „kam reikia suskaičiuoti, kas dangaus viduje".

Įdomu, kad dar ir mūsų dienomis minėta Magnickio lentelė yra beveik pakankama tiems gamtos tyrinėtojams, kuriems „reikia suskaičiuoti, kas dangaus viduje". Astronomams, matuojantiems atstumus iki tolimiausių žvaigždžių, vos sugaunamų fotoaparatu stipriausio teleskopo pagalba, netenka naudoti aukštesnių už milijoną pavadinimų. Tolimiausias mums žinomas dangaus kūnas yra už 100 milijonų „šviesmečių"[1] nuo žemės. Jei panorėtume šį atstumą išreikšti net centimetrais, gautume apie 1000 kvadrilijonų; reiškia, ir tuomet dar neišeitume iš Magnickio lentelės ribų.

Atkreipę dėmesį į kitą pusę — į visiškai mažų dydžių pasaulį, mes ir čia randame, kad kol kas nėra reikalo vartoti aukštesnius už kvadrilijoną skaičius... Molekulių skaičius viename kubiniame centimetre dujų — viena iš didžiausių realiai skaičiuojamų daugybių — išreiškiamas dešimtimis trilijonų.

Jeigu sugalvotume apskaičiuoti, kiek lašų yra vandenyne (laikant, kad lašo tūris lygus 1 *kub. mm,* t. y. visai nedaug), mums ir tuomet netektų vartoti aukštesnių už kvadrilijoną pavadinimų, nes toks skaičius skaičiuojamas tiktai tūkstančiais kvadrilijonų.

---

[1] Šviesmetis — atstumas, kurį šviesa nueina per vienerius metus.

Ir tiktai norėdami išreikšti, kiek gramų medžiagos yra visoje mūsų Saulės sistemoje, turėtume ieškoti aukštesnių už kvadrilijoną pavadinimų, nes šiame skaičiuje 34 skaitmenys (dvejetas ir 33 nuliai): 2000 kvintilijonų.

Jeigu jums įdomu, kaip vadinasi milžinų milžinai už kvadrilijono, pažvelkite į žemiau dedamą lentelę:

pavadinimas	*kiek nulių prie vieneto*
kvadrilijonas	24
kvintilijonas	30
sekstilijonas	36
septilijonas	42
oktalijonas	48
nonalijonas	54
dekalijonas	60
endekalijonas	66
dodekalijonas	72

Kokie dideli yra šitais pavadinimais pažymėti skaičiai, matyti jau vien iš to, kad regimosios visatos (pagal dabartines pažiūras) medžiagos gramų skaičius yra „tiktai“ 10 nonalijonų.

SKAIČIŲ MILŽINŲ RYKLIAI

Baigdami panagrinėsime ypatingos rūšies aritmetinį (gal būt, teisingiau — geometrinį) milžiną — kubinę mylią. Mes kalbėsime apie geografinę mylią, kuri sudaro 15-ją ekvatorinio laipsnio dalį ir yra lygi 7420 *m*. Kubinius matus mūsų vaizduotė įveikia gana sunkiai; paprastai mes smarkiai sumažiname jų didumą — tai ypač liečia stambius vienetus, sutinkamus astronomijoje. Tačiau, jeigu mes klaidingai įsivaizduojame jau kubinę mylią — didžiausią iš mūsų tūrio matų — tai koks klaidingas turi būti mūsų įsivaizdavimas Žemės rutulio, kitų planetų, Saulės tūrių! Todėl pravartu paskirti truputį laiko ir dėmesio, kad susidarytume tinkamesnį supratimą apie kubinę mylią.

Toliau pasinaudosime vieno talentingo populiarizatoriaus vaizdingu išdėstymu:

„Sakysim, kad ant tiesaus plento galime matyti per visą geografinę mylią į priekį. Pasidarykime vienos mylios ilgio stiebą ir pastatykime viename kelio gale, prie varstinio stulpo. Dabar pažvelkime aukštyn ir pažiūrėkime, koks aukštas mūsų stiebas. Tarkime, kad greta šito stiebo stovi vienodo aukštumo su juo, daugiau kaip 7 *km* aukščio, žmogaus stovyla. Tokios stovylos kelis būtų 1800 *m* aukštyje; reikėtų užrioglinti vieną ant kitos 25 egiptiečių piramides, norint pasiekti stovylos juosmenį!

Dabar įsivaizduokime, kad pastatėme du tokius mylios aukštumo stiebus per mylią vieną nuo kito ir sujungėme abu juos lentomis; gavome mylios pločio ir mylios aukščio sieną. Tai ir yra kvadratinė mylia.

Mes turime vertikaliai stovinčią medinę sieną. Įsivaizduokime dar keturias panašias sienas, sujungtas tarpusavy, kaip dėžė. Iš viršaus pridenkime ją mylios ilgio ir mylios pločio dangčiu. Ši dėžė užims kubinės mylios tūrį. Dabar pažiūrėkime, kaip didelė šita dėžė, t. y. ko ir kiek galima į ją sudėti.

Pradėsime nuo to, kad, nuėmę dangtį, sumesime į dėžę visus Leningrado pastatus. Jie ten užims labai nedaug vietos. Pasuksime į Maskvą ir pakeliui pasiimsime visus didelius ir mažus miestus. Tačiau, kadangi visa tai padengs tiktai dėžės dugną, paieškosime medžiagos jai užpildyti kitur. Paimsime Paryžių su visais jo triumfaliniais vartais, kolonomis, bokštu ir mesime į dėžę. Visa tai lekia, kaip į bedugnę; vos-vos pastebimas papildymas. Pridėsime Londoną, Vieną, Berlyną. Tačiau, kadangi ir viso šito maža, kad būtų nors truputį užpildyta dėžės tuštuma, imsime mėtyti į ją visus be išimties miestus, tvirtoves, pilis, kaimus, atskirus pastatus. Vis tiek maža! Sumesime tenai visa, kas tik sukurta žmogaus rankomis Europoje; bet dėžė vos prisipildė tiktai iki vieno ketvirtadalio. Pridėsime visus pasaulio laivus; ir tai maža tepadės. Mesime į dėžę visas Egipto piramides, visus Senojo ir Naujojo pasaulio bėgius, viso pasaulio mašinas ir fabrikus — visa, kas žmonių sukurta Azijoje, Afrikoje, Amerikoje, Australijoje. Dėžė prisipildo vos iki pusės. Pakratykime ją, kad visa joje lygiau sugultų, ir bandykime, ar negalima jos papildyti. Jeigu mes panorėtume dėžėje sutalpinti visą gyvąjį pasaulį: visus arklius, jaučius, asilus, mulus, avinus, kupranugarius, o ant jų sukrauti visus paukščius, žuvis, gyvates — visa, kas skraido ir šliaužioja, — tai ir tuomet neįstengtume pripildyti dėžės iki viršaus, nepanaudoję uolų ir smėlio.

Štai kokia kubinė mylia. O iš Žemės rutulio galima padaryti 660 milijonų panašių dėžių! Kad ir kaip begerbtume kubinę mylią, Žemės rutuliui tenka rodyti dar didesnę pagarbą".

Prie to, kas pasakyta, nuo savęs pridėsime tai, kad kubinėje mylioje kviečių būtų keletas trilijonų grūdų. Matome, kad šitas kubinis milžinas — tikras kitų milžinų ryklys.

Gana įspūdinga yra ir kubinio kilometro talpa.

Nesunku apskaičiuoti, kad vieno kubinio kilometro dėžėje tilptų 5000 bilijonų glaudžiai sukrautų degtukų; tokiam degtukų kiekiui pagaminti, fabrikas, pagaminantis milijoną degtukų per parą, turėtų dirbti 14 milijonų metų; o tokiam degtukų kiekiui pervežti reikėtų 10 milijonų vagonų — šimto tūkstančių kilometrų ilgio traukinio, $2^1/_2$ karto ilgesnio už Žemės pusiaują.

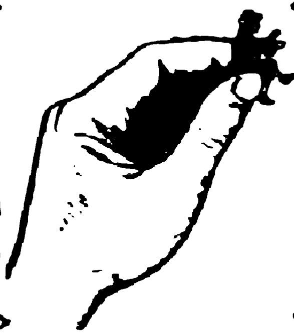
LAIKO MILŽINAI

Milžiniškus laiko tarpus mes įsivaizduojame dar migločiau, negu milžiniškus nuotolius ir tūrius. Geologija moko, kad nuo seniausių Žemės plutos sluoksnių susidarymo praėjo šimtai milijonų metų. Kaip pajusti tokių neaprėpiamų laiko tarpų didumą? Vienas mokslininkas pasiūlė tokį būdą:

„Visą Žemės istoriją įsivaizduokime kaip 500 *km* ilgio tiesę. Tegul šis atstumas vaizduoja tuos 500 milijonų metų, kurie prabėgo nuo k a m b r o epochos (viena iš seniausių Žemės plutos istorijos epochų) pradžios. Kadangi kilometras atitinka vieno milijono metų laikotarpį, tai paskutiniai 500—1000 metrų vaizduos l e d y n i n i o laikotarpio ilgumą; o 6000 metų pasaulinės istorijos sutrumpės iki 6 *m* — kambario ilgio. Tokiame mastelyje 70 metų žmogaus gyvenimo vaizduos 7 *cm* ilgio linija. Jeigu visus išvardytus nuotolius reikėtų nušliaužti sraigei, kurios normalus greitis 3,1 *mm* per sekundę, tai visą nuotolį ji įveiktų lygiai per 5 metus. O visą laikotarpį nuo pirmojo pasaulinio karo pradžios iki mūsų dienų ji atšliaužtų per 13 sekundžių... Matome, kokie menki yra, palyginus su Žemės istorijos mastu, tie nedideli laikotarpiai, kuriuos žmogus gali aprėpti savo protu...

UŽDAVINYS-POKŠTAS

Koks skaičius dalijasi iš visų skaičių be liekanos?



DEŠIMTASIS SKYRIUS

SKAIČIAI LILIPUTAI

IŠ MILŽINŲ PAS NYKŠTUKUS

Savo kelionėse Guliveras, palikęs nykštukus-liliputus, atsidūrė tarp milžinų. Mes keliaujame atvirkščia tvarka: susipažinę su skaičiais milžinais, pereiname į liliputų pasaulį — prie skaičių, kurie tiek pat kartų mažesni už vienetą, kiek vienetas mažesnis už aritmetinį milžiną.

Šito pasaulio atstovų surasti nesunku: pakanka parašyti eilę skaičių, atvirkščių milijonui, milijardui, bilijonui ir t. t., t. y. padalyti vienetą iš šitų skaičių. Tokiu būdu gautos trupmenos

$$\frac{1}{1\,000\,000}, \quad \frac{1}{1\,000\,000\,000}, \quad \frac{1}{1\,000\,000\,000\,000} \text{ ir t. t.}$$

yra tipiški skaičiai liliputai, tokie pat pigmėjai[1], palyginus su vienetu, kaip vienetas, palyginus su milijonu, milijardu, bilijonu ir kitais skaičiais milžinais.

Matote, kad kiekvieną skaičių milžiną atitinka skaičius liliputas ir kad, vadinasi, skaičių liliputų yra ne mažiau kaip milžinų. Jiems pažymėti yra taip pat sugalvotas

[1] Pigmėjas — mažyčio ūgio žmogus.

sutrumpintas būdas. Mes jau minėjome, kad labai dideli skaičiai moksliniuose veikaluose (fizikos, astronomijos) yra pažymimi taip:

1 000 000 .	10^6
10 000 000 .	10^7
400 000 000 .	$4 \cdot 10^8$
6 kvadrilijonai . .	$6 \cdot 10^{24}$ ir t. t.

Juos atitinkantieji skaičiai liliputai žymimi taip:

$\frac{1}{1\,000\,000}$ . . . . 10^{-6}

$\frac{1}{100\,000\,000}$ . . . . 10^{-8}

$\frac{3}{1\,000\,000\,000}$ . . . . $3 \cdot 10^{-9}$ ir t. t.

Tačiau ar iš tikrųjų reikia turėti panašias trupmenas? Ar tikrovėje susiduriama kada nors su taip mažomis vieneto dalimis?

Apie visa tai bus įdomu pasikalbėti smulkiau.

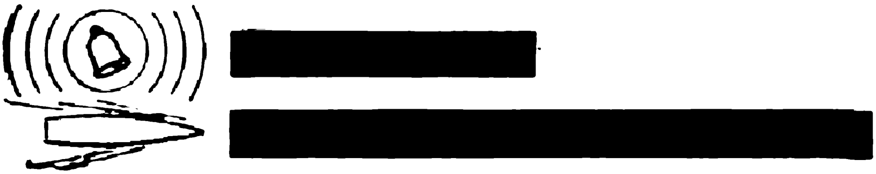
LAIKO LILIPUTAI

Sekundę įprasta laikyti tokiu mažu laiko tarpeliu, kad su jos mažomis dalimis jokiomis aplinkybėmis nesiskaitoma. $\frac{1}{1000}$ sekundės lengva parašyti, bet tai yra grynai popierinis dydis, nes per tokį nežymų laikotarpį tarytum negali nieko įvykti.

Taip galvoja daugelis, tačiau jie klysta, nes per vieną tūkstantąją sekundės gali spėti įvykti gana daug reiškinių.

36 *km* greičiu per valandą važiuojąs traukinys per sekundę praeina 10 *m* ir, vadinasi, per 1000-ją dalį sekundės spėja pajudėti vienu centimetru. Garsas ore per 1000-ją dalį sekundės pajuda 33 *cm*, o iš šautuvo vamzdžio 700—800 *m* per sekundę greičiu išlekianti kulka per tą patį laikotarpį nulekia 70 *cm*. Žemės rutulys, besisukdamas aplink Saulę, kiekvieną 1000-ją dalį sekundės pasislenka per 30 metrų. Aukštą toną skleidžianti styga per 1000-ją dalį

sekundės suvirpa du-keturis ir daugiau kartų; net uodas per tą laiką spėja savo sparneliais mostelti žemyn arba aukštyn. Žaibas trunka žymiai trumpiau, negu 1000-ją dalį sekundės: per tokį laikotarpį spėja prasidėti ir pasibaigti



Nors 1000-oji sekundės dalis yra labai maža, tačiau per šitokį laiko tarpą garsas suspėja nueiti 33 *cm*, o šautuvo kulka nulekia 70 *cm*

toks reikšmingas gamtos reiškinys (žaibas nusitęsia per kelis kilometrus).

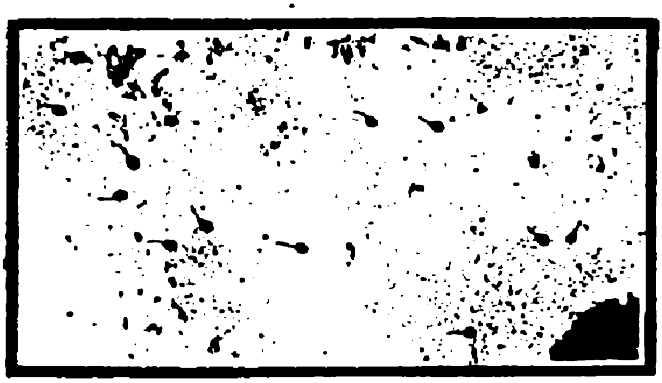
Tačiau — pareikšite jūs — 1000-sios dalies sekundės dar negalima laikyti liliputu, kaip niekas nevadina tūkstančio skaičiumi milžinu. Štai jeigu paimtume milijoninę sekundės dalį, tai jau tikriausiai galima teigti, kad šis dydis yra nerealus — per tokį laikotarpį nieko negali įvykti. Klystate! Net ir viena 1 000 000-inė dalis sekundės — pavyzdžiui, šiuolaikiniam fizikui — visiškai nėra perdaug mažas laikotarpis. Šviesos (ir elektros) reiškinių srityje mokslininkui tenka labai dažnai susidurti su žymiai smulkesnėmis sekundės dalimis. Priminsime visų pirma, kad šviesos spindulys (tuštumoje) kas sekundė nubėga 300 000 *km;* vadinasi, per 1 000 000-inę dalį sekundės šviesa spėja nueiti 300 *m* atstumą — maždaug tiek pat, kiek garsas ore per visą sekundę.

Toliau: šviesa yra banginis reiškinys, ir šviesos bangos, praeinančios kas sekundė pro kiekvieną erdvės tašką, skaičiuojamos šimtais bilijonų. Tos šviesos bangos, kurios, veikdamos mūsų akis, sukelia raudonos spalvos pojūtį, yra 400 bilijonų svyravimų per sekundę dažnumo; tai reiškia, kad per vieną 1 000 000-inę dalį sekundės į mūsų akį patenka 400 milijonų bangų, o viena banga patenka į akį per 400 000 000 000 000-inę dalį sekundės. Štai tikrasis skaičius liliputas!

Tačiau šitas neabejotinas, realiai egzistuojąs liliputas yra tikras milžinas, palyginus su dar smulkesnėmis sekundės dalimis, su kuriomis fizikas susiduria, studijuodamas rentgeno spindulius. Šie nuostabūs spinduliai, turintieji savybę prasiskverbti pro daugelį neskaidrių kūnų, yra, kaip ir matomieji spinduliai, banginis reiškinys, bet jų svyravimų dažnumas žymiai didesnis už matomųjų spindulių: jis siekia 2500 bilijonų per sekundę. Čia bangos eina viena paskui kitą 60 kartų dažniau, negu matomosios raudonos šviesos spinduliuose. Reiškia, ir liliputų pasaulyje yra savi milžinai ir nykštukai. Guliveras buvo tiktai tuziną kartų aukštesnis už liliputus ir tai pastariesiems atrodė milžinu. O čia vienas liliputas didesnis už kitą penkiais tuzinais kartų ir, vadinasi, jo atžvilgiu turi teisę vadintis milžinu.

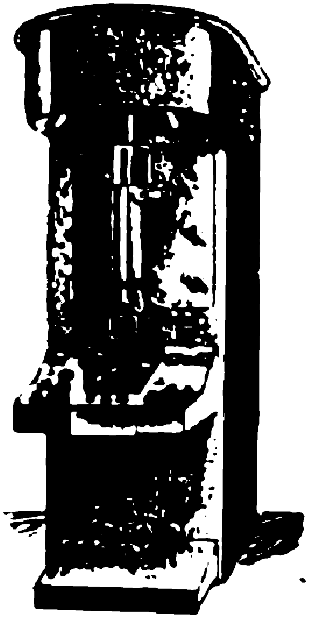
ERDVĖS LILIPUTAI

Įdomu dabar panagrinėti, kokius mažiausius atstumus tenka atmatuoti ir įvertinti šiuolaikiniams gamtos tyrinėtojams.



Mikrobų rykliai — bakteriofagai — panašūs į rutuliukus su uodegyte; uodegytė yra truputį ilgesnė už 100 000-ąją milimetro dalį, o kūnelis — dar mažesnis. Tai tikri liliputai.

Metrinėje matų sistemoje mažiausias ilgio vienetas kasdieniniam vartojimui — m i l i m e t r a s; jis yra maždaug du kartus mažesnis už degtuko storį. Paprasta akimi matomiems daiktams matuoti toks ilgio vienetas yra pakankamai smulkus. Tačiau matuoti bakterijoms ir kitiems smulkiems objektams, išskiriamiems tiktai pro stiprius mikroskopus, milimetras yra perdaug stambus. Tokiuose matavimuose mokslininkai naudoja smulkesnį vienetą — mikroną, kuris 1000 kartų mažesnis už milimetrą. Vadinamieji raudonieji kraujo kūneliai, kurių kiekviename mūsų kraujo lašelyje yra dešimtys milijonų, yra 7 mikronų ilgio ir 2 mikronų storio. Stulpelis iš tūkstančio tokių kūnelių yra degtuko storumo.



Elektroninis mikroskopas, kuriuo galima padidinti 100 000 kartų; pro jį yra matomi ir bakteriofagai.

Nors mikronas atrodo mums labai smulkus, tačiau jis yra perdaug stambus atstumams, kuriuos tenka matuoti šių laikų fizikui. Smulkiausios, net mikroskopui neprieinamos dalelės — molekulės, — iš kurių susideda visų gamtos kūnų medžiaga, o taip pat jas sudarančios dar smulkesnės dalelės — atomai — yra nuo vienos šimtosios iki vienos tūkstantosios mikrono[1] dalies dydžio. Jei sustosime ties pastaruoju dydžiu, tai ir tada pasirodys, kad milijonas tokių kruopelyčių (o mes jau žinome, koks didelis yra milijonas), išdėstytų vienoje tiesėje, glaudžiai viena prie kitos, užimtų iš viso milimetrą.

---

[1] Smulkiausias šiuolaikinėje fizikoje vartojamas ilgio vienetas yra *IKS*; jis yra lygus 10 000 000-inei daliai mikrono.

Kad gerai įsivaizduotume nepaprastą atomų mažumą, paimkime tokį pavyzdį. Įsivaizduokite, kad visi Žemės rutulio daiktai padidėjo milijoną kartų. Eifelio bokštas Paryžiuje (300 *m* aukščio) savo viršūne tuomet išsikištų per 300 000 *km* į visatos erdves ir būtų netoli Mėnulio orbitos. Žmonės būtų 1/4 Žemės spindulio (apie 1700 *km*) didumo; vienu žingsniu toks žmogus milžinas galėtų nužengti 600—700 kilometrų. Smulkučiai raudonieji kūneliai, milijardais plaukioją jo kraujyje, būtų kiekvienas 7 *m* skersmens. Plaukas būtų 100 *m* storumo. Pelė siektų 100 *km*, o musė — 7 *km* ilgį. Kokio dydžio būtų taip pasibaisėtinai padidintas medžiagos atomas?

Tiesiog nesinori tikėti: jo didumas pasirodys besąs kaip... šitos knygos spaustuvinio taško!

Ar čia mes pasiekiame erdvinių mažybių kraštutinę ribą, kurios netenka peržengti net fizikui savaisiais ištobulintais matavimų metodais? Dar nelabai seniai buvo taip manoma; tačiau dabar nustatyta, kad atomas — ištisas pasaulis, susidedantis iš žymiai smulkesnių dalelių, kad jame veikia galingos jėgos. Pavyzdžiui, vandenilio atomą sudaro centrinis branduolys ir aplink jį greitai besisukantis elektronas. Nesileisdami į kitas smulkmenas, pasakysime tik, kad elektrono skersmuo matuojamas bilijoninėmis milimetro dalimis. Kitaip tiriant, elektrono skersmuo yra beveik milijoną kartų mažesnis už atomo skersmenį. O jei panorėsite palyginti elektrono ir dulkelės dydžius, paskaičiavę sužinosite, kad elektronas yra už dulkelę mažesnis maždaug tiek pat kartų, kiek dulkelė mažesnė — už ką jūs galvojate? — už Žemės rutulį!

Matote, kad atomas — liliputas tarp liliputų — tuo pat metu yra tikras milžinas, lyginant jį su elektronu, įeinančiu į jo sudėtį, — toks pat milžinas, kokiu yra visa Saulės sistema Žemės rutulio atžvilgiu.

Galima būtų sudaryti tokius pamokančius laiptelius, kurių kiekviena pakopa yra milžinas aukštesnės pakopos atžvilgiu ir liliputas — žemesnės atžvilgiu:

elektronas
atomas
dulkelė
namas
Žemės rutulys
Saulės sistema
atstumas iki Šiaurės žvaigždės
Paukščių Kelias

Kiekvienas šitos eilutės narys yra maždaug ketvirtadaliu milijono kartų[1] didesnis už aukštesnįjį ir tiek pat kartų mažesnis už žemesnįjį. Niekas taip išraiškingai neįrodo visą savokų „didelis" ir „mažas" reliatyvumą, kaip ši lentelė. Gamtoje nėra besąlygiškai didelio arba besąlygiškai mažo daikto. Kiekvieną daiktą galima pavadinti ir nepaprastai didžiuliu ir nykstamai mažu, priklausomai nuo to, kaip į jį pažiūrėsime, su kuo palyginsime.

MILŽINŲ MILŽINAS IR LILIPUTŲ LILIPUTAS

Mūsų pasikalbėjimai apie skaičių pasaulio milžinus ir nykštukus būtų nepilni, jeigu mes nepapasakotume skaitytojui apie vieną nuostabią šios rūšies keistenybę, kuri, tiesa, nėra nauja, bet verta tuzino naujų. Pažintį su ja pradėsime nuo tokio pažiūrėti visai nesudėtingo uždavinio:

Kokį didžiausią skaičių galima parašyti trimis skaitmenimis, nenaudojant jokių veiksmų ženklų?

Norisi atsakyti: 999, tačiau jūs, tikriausiai, jau įtariate, kad čia bus kitoks atsakymas; priešingu atveju uždavinys

[1] Kalbama apie linijinius dydžius (o ne apie tūrius), t. y. apie atomo skersmenį, Saulės sistemos skersmenį, namo aukštį arba ilgį ir pan.

būtų pernelyg paprastas. Ir, iš tikrųjų, teisingas atsakymas užrašomas taip:

$$9^{9^9}$$

Šis reiškinys pažymi: „devintas laipsnis devynių, pakeltų devintu laipsniu“ [1]. Kitaip tariant: reikia rasti sandaugą iš tiek devyniukių, kiek yra vienetų šios sandaugos rezultate:

$$9\times 9\times 9\times 9\times 9\times 9\times 9\times 9\times 9.$$

Vos pradėję skaičiuoti, pajuntame būsimo rezultato milžiniškumą. Jeigu jums užteks kantrybės sudauginti devynias devyniukes, tai gausite skaičių:

$$387\,420\,489.$$

Tačiau svarbiausias darbas tik prasideda: dabar reikia rasti

$$9^{387420489},$$

t. y. 387 420 489 devyniukių sandaugą. Apvaliai skaičiuojant, reikės atlikti 400 milijonų dauginimų...

Be abejo, jūs neturėsite laiko atlikti panašius skaičiavimus iki galo. O aš neturiu galimybės pranešti jums gatavą rezultatą — dėl trijų priežasčių, kurių negalima nelaikyti svarbiomis. Pirma, šito skaičiaus niekas ir niekada dar neišskaičiavo (yra žinomas tiktai apytikris rezultatas). Antra, jeigu jis net ir būtų išskaičiuotas, tai jam atspausdinti prireiktų ne mažiau kaip tūkstančio tokių knygų, kaip šita, nes mūsų skaičius susideda iš 369 693 061 skaitmens; surinktas paprastu šriftu, jis būtų 1000 *km* ilgio — nuo Leningrado iki Gorkio. Pagaliau, jeigu man būtų duota pakankamai popieriaus ir rašalo, aš ir tada negalėčiau patenkinti jūsų smalsumo. Jūs lengvai galite suprasti kodėl: jeigu, sakysim, aš galiu nepertraukiamai rašyti po du skaitmenis per sekundę, tai per valandą parašysiu 7200 skait-

[1] Matematine kalba toks reiškinys vadinamas „devynių trečiuoju viršlaipsniu“.

menų, o per parą, dirbdamas be paliovos dieną ir naktį, ne daugiau kaip 172 800 skaitmenų. Reiškia, norint parašyti skaičių, reikėtų, neatsitraukiant nuo plunksnos nė sekundei, dirbant be poilsio diena iš dienos kiauras paras, prasėdėti ne mažiau kaip 7 metus...

Galiu pranešti, kad tas skaičius prasideda skaitmenimis 428 124 773 175 747 048 036 987 118 ir baigiasi 89. Kas yra tarp šios pradžios ir pabaigos — nežinoma. O juk ten 369 693 061 skaitmuo!..

Matote, kad jau mūsų rezultato s k a i t m e n ų s k a i č i u s yra neįsivaizduojamai didžiulis. Tai koks didelis yra pats skaičius, išreikštas tokia ilgiausia skaitmenų eile? Sunku net apytikriai pailiustruoti jo didumą, nes tokios daugybės daiktų, skaitant net ir elektronus atskirais daiktais, nėra v i s o j e v i s a t o j e!

Archimedas kažkada išskaičiavo, kiek smiltelių būtų pasaulyje, jeigu jis visas iki nejudančių žvaigždžių būtų pripildytas smulkiausio smėlio. Jis gavo rezultatą, neviršijantį vieneto su 63 nuliais. Mūsų skaičius susideda ne iš 64, o beveik iš 370 m i l i j o n ų skaitmenų — vadinasi, jis neišmatuojamai viršija milžiniškąjį Archimedo skaičių.

Paseksime Archimedo pavyzdžiu, tiktai, užuot skaičiavę smilteles, paskaičiuosime elektronus. Jūs jau žinote, kad elektronas yra mažesnis už smiltelę maždaug tiek pat, kiek smiltelė mažesnė už Žemės rutulį. Sakysim, kad matomosios visatos spindulys yra lygus m i l i j a r d o šviesmečių nuotoliui [1]. Kadangi šviesa sklinda 300 000 *km* per sekundę greičiu, o metuose yra 31 milijonas sekundžių, tai galima skaičiuoti, apvaliais skaičiais, kad šviesmetis yra lygus 10 bilijonų kilometrų (vaikytis čia didesnio tikslumo nėra reikalo). Reiškia, visos mums žinomos visatos spindulys yra 10 milijardų bilijonų kilometrų ilgio, arba, panaudojus

[1] Tolimiausias astronomams žinomas dangaus kūnas yra 100 milijonų šviesmečių nuotolyje, t. y. dešimt kartų arčiau.

aukščiau paaiškintą skaičių milžinų vaizdavimo būdą, 10^{22} *km*.

Šitokio spindulio rutulio tūrį galima apskaičiuoti pagal geometrines taisykles: jis lygus (apvaliais skaičiais) 44.10^{66} *kub. km*. Šitą skaičių padauginę iš kubinių centimetrų skaičiaus kubiniame kilometre (10^{15}), gauname, kad matomosios visatos tūris[1] yra 10^{81} *kub. cm*.

Dabar įsivaizduokime, kad visas šis tūris yra i š t i s a i užpildytas sunkiausiais mums žinomais atomais — elemento urano atomais, kurių vienam kubiniam centimetrui tenka apie 10^{22} vienetų. Nurodyto tūrio rutulyje jų tilptų 10^{103} vienetų. Žinome, kad kiekviename urano atome yra 238 elektronai (vidiniai ir išoriniai). Todėl visoje mūsų tyrinėjimams prieinamoje visatoje galėtų tilpti ne daugiau kaip 10^{106} elektronų.

Skaičius, susidedantis „tiktai" iš 107 skaitmenų... Kaip tai menka palyginus su mūsų skaičiumi milžinu, susidedančiu beveik iš 370 m i l i j o n ų skaitmenų!

Matote, kad, ištisai užpildę matomąją visatą elektronais, mes neišsėmėme net nedidelės dalies to milžiniško skaičiaus, kuris slepiasi po kukliu užrašymu:

$$9^{9^9}$$

Susipažinę su šituo užsimaskavusiu milžinu, pažvelkime į jo priešingybę.

Jį atitinkantį skaičių liliputą gausime, padaliję iš to skaičiaus vienetą. Turėsime:

$$\frac{1}{9^{9^9}},$$

o tai yra lygu:

$$\frac{1}{9^{387\,420\,489}}.$$

[1] Įdomu pažymėti, kad savo smiltelių skaičiavime Archimedas visatos tūrį laiko lygiu $5 \cdot 10^{54}$ *kub. cm*.

Mums pažįstamas milžiniškas skaičius čia yra vardiklyje. Milžinų milžinas tapo liliputų liliputu.

Reikia padaryti esminę pastabą apie milžiną iš trijų devyniukių. Aš gavau iš skaitytojų nemaža laiškų, kuriuose tvirtinama, kad tokį reiškinį išskaičiuoti ne taip jau sunku; eilė skaitytojų net atliko reikalingus skaičiavimus, kuriems prireikė palyginti nedaug laiko. Rezultatas pasirodė nepalyginamai kuklesnis už tą, apie kurį aš papasakojau. Iš tikrųjų, rašo jie,

$$9^9 = 387\,420\,489;$$

o pakėlę 387 420 489 devintu laipsniu, gauname skaičių „tiktai" iš 72 skaitmenų. Tai, nors ir nemaža, tačiau iki 370 milijonų skaitmenų nuo jo dar labai toli...

Skaitytojai nesupranta, o tuo tarpu jų klaida yra ta, kad jie neteisingai suprato triaukščio reiškinio iš devyniukių prasmę. Jie supranta jį taip:

$$(9^9)^9,$$

tuo tarpu teisingas jo supratimas yra kitoks:

$$9^{(9^9)}.$$

Dėl to gaunamas milžiniškas skirtumas tarp skaičiavimo rezultatų.

Abu supratimo būdai duoda vienodą rezultatą tiktai vienu atveju: kai mes turime reiškinį

$$2^{2^2}.$$

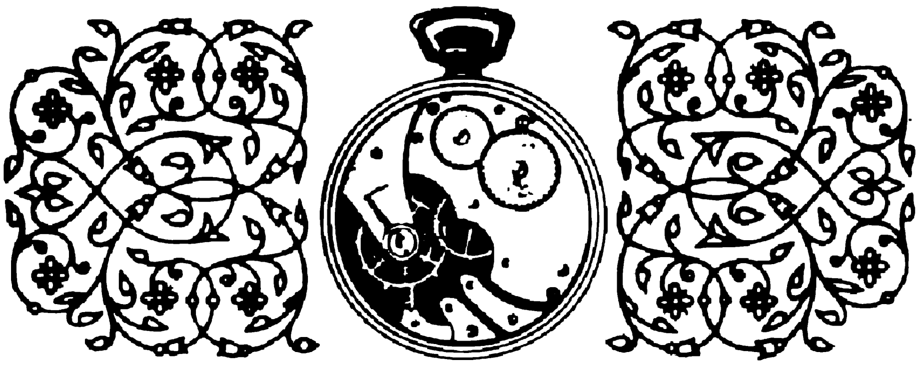
Šiuo atveju nesvarbu, kaip skaičiuoti: abiem atvejais gaunamas vienodas rezultatas — 16.

Įdomu, kad tik ką duotas reiškinys visai neduoda didžiausio skaičiaus, kurį galima atvaizduoti trimis dvejukėmis. Galima gauti žymiai didesnį skaičių, dvejukes išdėsčius taip:

$$2^{22}.$$

Šitoks reiškinys yra lygus 4 194 304, t. y. žymiai daugiau už 16.

Kaip matote, trečiasis viršlaipsnis ne visais atvejais išreiškia didžiausią skaičių, kokį galima atvaizduoti trimis vienodais skaitmenimis.



VIENUOLIKTASIS SKYRIUS

ARITMETINĖS KELIONĖS

JŪSŲ KELIONĖ APLINK PASAULĮ

Jaunystėje aš dirbau sekretoriumi vieno plačiai paplitusio Leningrado žurnalo redakcijoje. Vieną kartą man buvo paduota lankytojo vizitinė kortelė. Joje perskaičiau nepažįstamą vardą ir visiškai neįprastą profesijos pavadinimą: „pirmasis rusų keliautojas aplink pasaulį pėsčiomis“. Tarnybiniais reikalais man teko ne kartą kalbėtis su keliautojais, atlikusiais keliones į visas pasaulio dalis, o taip pat ir aplink pasaulį, bet apie „keliautoją aplink pasaulį pėsčiomis“ aš dar nebuvau girdėjęs. Su smalsumu išskubėjau į priimamąjį, norėdamas susipažinti su šiuo apsukriu ir nepavargstančiu žmogumi.

Nuostabusis keliautojas buvo jaunas ir labai kuklios išvaizdos. Paklaustas, kada jis spėjo savo nepaprastą kelionę atlikti, „pirmasis rusų keliautojas ir t. t.“ man paaiškino, kad jis keliauja kaip tik dabar. Maršrutas? Šuvalovas—Leningradas [1]; o dėl tolesnio jis norėtų pasitarti su

[1] Šuvalovas — nedidelė stotis už 10 *km* nuo Leningrado.

manim... Pasikalbėjimo metu paaiškėjo, kad „pirmojo rusų ir t. t." planai yra gana migloti, bet, kokie jie bebūtų, neišeina už Rusijos ribų.

— Kaip gi jūs tuomet atliksite kelionę aplink pasaulį? — paklausiau nustebęs.

— Svarbiausia nueiti Žemės perimetro nuotolį; šitai galima atlikti ir Rusijoje, — išsklaidė jis mano abejones. — Jau nueita dešimt kilometrų, ir belieka...

— Iš viso trisdešimt devyni tūkstančiai devyni šimtai devyniasdešimt. Laimingos kelionės!..

Nežinau, kaip „pirmasis ir t. t." keliavo likusią savo kelio dalį. Tačiau visiškai neabejoju, kad jis sėkmingai įvykdė savo sumanymą. Net jeigu jis daugiau iš viso nekeliavo, o iš karto sugrįžo į gimtąjį Suvalovą ir gyveno tenai neišvažiuodamas, — jis ir tokiu atveju nuėjo ne mažiau kaip 40 000 *km*. Bėda tiktai, kad jis ne pirmasis ir ne vienintelis žmogus, atlikęs tokį žygį. Ir jūs, ir aš, ir dauguma kitų mūsų Sąjungos piliečių turi tokią pat teisę vadintis „keliautoju aplink pasaulį pėsčiomis", Suvalovo ėjiko supratimu. Mat, kiekvienas iš mūsų, koks namisėda jis bebūtų, per savo gyvenimą, pats to neįtardamas, suspėjo pėsčiomis nueiti kelią, net ilgesnį kaip Žemės rutulio apskritimas. Tuo jus įtikins nedidelis aritmetinis apskaičiavimas.

Kiekvienas 13-metis berniukas spėjo jau du kartus apkeliauti aplink pasaulį.

Kiekvieną dieną jūs, aišku, esate ne mažiau kaip 5 valandas ant kojų: vaikščiojate po kambarius, po kiemą, gatve, — žodžiu, šiaip ar taip, žingsniuojate. Jeigu jūsų kišenėje būtų žingsnomatis (prietaisas padarytiems žingsniams skaičiuoti), jis parodytų, kad jūs kasdien padarote ne mažiau kaip 30 000 žingsnių. Bet ir be žingsnomačio aišku, kad jūsų per dieną nueinamas nuotolis yra labai įspūdingas. Visai pamažu žingsniuojantis žmogus per valandą nueina 4—5 *km*. Tai per dieną, per 5 valandas, sudaro 20—25 *km*. Dabar belieka dieninį perėjimą padauginti iš 360 — ir sužinosime, kokį kelią kiekvienas nueiname per ištisus metus:

$$20 \times 360 = 7200, \text{ arba } 25 \times 360 = 9000.$$

Taigi, net mažai judrus žmogus, niekada nepaliekantis gimtojo miesto, kasmet pėsčiomis nueina apie 8000 *km*. O kadangi Žemės rutulio apskritimas yra 40 000 *km* ilgio, tai nesunku apskaičiuoti, per kiek metų mes pėsčiomis atliekame kelionę, lygią kelionei aplink pasaulį:

$$40\,000 : 8\,000 = 5.$$

Reiškia, per 5 metus jūs nueinate kelią, lygų Žemės rutulio apskritimo ilgiui. Kiekvienas 13-metis berniukas, jei laikysime, kad jis pradėjo vaikščioti turėdamas dvejus metus, yra jau du kartus apkeliavęs aplink Žemę. Kiekvienas 25 metų žmogus yra atlikęs ne mažiau kaip keturias tokias keliones. O išgyvenę 60 metų, mes dešimt kartų apkeliausime aplink Žemės rutulį, t. y. nueisime kelią ilgesnį, negu nuo Žemės iki Mėnulio (380 000 *km*). Štai kokį nelauktą rezultatą gauname, apskaičiavę įprastinį reiškinį — mūsų kasdieninį vaikščiojimą po kambarį ir už namų ribų.

JŪSŲ KOPIMAS Į MONBLANĄ[1]

Štai dar vienas įdomus apskaičiavimas. Jeigu jūs paklausite laiškanešį, kiekvieną dieną išnešiojantį adresatams laiškus, arba gydytoją, visą dieną lankantį ligonius, ar jie yra įkopę į Monblaną, aišku, juos nustebins toks klausimas.

---

[1] Monblanas — aukščiausia Alpių ir visos Europos viršūnė. Jos aukštis yra 4810 *m*.

Per metus laiškanešys 8 kartus užkopia į aukščiausių Europos kalnų aukštį.

Tuo tarpu jūs galite lengvai įrodyti kiekvienam iš jų, kad jie, nebūdami alpinistais, tikriausiai jau užkopė į aukštį, viršijantį aukščiausią Alpių viršūnę.

Reikia tiktai paskaičiuoti, per kiek pakopų kasdien užlipa laiškanešys, belaipiodamas laiptais su laiškais, arba lankantis ligonius gydytojas. Pasirodo, kad kukliausias laiškanešys, labiausiai užimtas gydytojas, kurie niekada ir nepagalvojo apie sportines varžybas, sumuša pasaulinius alpinizmo rekordus. Apskaičiuokite tai.

Skaičiavimams imsime gana kuklius vidutinius skaitmenis. Sakysim, kad laiškanešys kasdien aplanko tiktai dešimtį žmonių, gyvenančių kuris antrame aukšte, kuris trečiame, ketvirtame, penktame — vidutiniškai imsime trečiame aukšte. Trečio aukšto aukštį, skaičiuodami apvaliais skaičiais, laikysime lygiu 10 *m*: vadinasi, mūsų laiškanešys kasdien laiptų pakopomis atlieka $10 \times 10 = 100$ *m* kelionę aukštyn. Monblano aukštis — 4810 *m*. Padaliję jį iš 100, sužinote, kad mūsų kuklus laiškanešys į Monblaną įkopia per 48 dienas...

Taigi, laiškanešys kas 48 dienos, arba maždaug 8 kartus per metus, laiptais pakyla į aukštį, lygų aukščiausiai Europos viršūnei. Sakykite, koks sportininkas kasmet po 8 kartus užsikaria į Monblano viršūnę? Gydytojo atžvilgiu aš turiu ne spėjamus, o realius skaitmenis. Leningrado gydytojai, lankantieji ligonius namuose, apskaičiavo, kad vidutiniškai kiekvienas iš jų per savo darbo dieną pasikelia, eidami pas ligonius, per 2500 pakopų. Imant pakopos aukštį lygų 15 *cm* ir skaičiuojant, kad metuose yra 300 darbo dienų, gaunama, kad gydytojas per metus pakyla į 112 *km* aukštį, t. y. daugiau kaip 20 kartų įkopia į Monblano viršūnę, arba — jeigu norite — pakyla 5 kartus aukščiau už stratostato „Osoaviachim-1" iškilimą.

Nebūtina būti laiškanešiu arba gydytoju, kad būtų atliekami tokie žygiai, aišku, to visai nežinant.

Aš gyvenu antrame aukšte, bute, į kurį veda 20 pakopų laiptai — skaičius, atrodytų, labai kuklus. Kiekvieną dieną man tenka užlipti tais laiptais 5 kartus, be to, dar aplankyti du butus, esančius tokiame pat aukštyje.

Vidutiniškai galima laikyti, kad aš kasdien pasikeliu 7 kartus dvidešimties pakopų laiptais, t. y. kiekvieną dieną užlipu per 140 pakopų. Kiek pakopų susidarys per metus?

$$140 \times 360 = 50\,400.$$

Reiškia, kasmet aš pakylu daugiau kaip per 50 000 pakopų. Per 60 metų aš pasieksiu pasakiškai aukštų — 3 milijonų pakopų (450 *km*) — laiptų viršūnę!

Kaip būčiau nustebęs, jeigu kas nors mane mažą būtų atvedę prie tokių, vedančių į begalinius tolius, laiptų papėdės ir pasakę, kad, gal būt, kada nors aš pasieksiu jų viršūnę. . .

O į kokias milžiniškas aukštumas pakyla žmonės, kurie pagal savo specialybę tiktai ir kilnojasi aukštyn, — pavyzdžiui, liftininkai!

Mes su pasididžiavimu sužinome, kad tarp mūsų aviacijos žymūnų yra žmonių, kurie yra nuskridę tokį kilometrų skaičių, kuris ne tiktai lygus atstumui nuo Žemės iki Mėnulio, bet ir viršija šį atstumą daugelį kartų.

Mus nustebins ir tai, kad yra žmonių, kurie pagal savo darbo pobūdį keliauja į Mėnulį savo kojomis: pavyzdžiui, yra apskaičiuota, kad Niujorko dangoraižio liftininkas į aukštį, lygų atstumui iki Mėnulio, pasikelia per 15 metų.

NEPASTEBIMA KELIONĖ Į VANDENYNO DUGNĄ

Labai įspūdingas keliones atlieka rūsių patalpų gyventojai, tokių pat sandėlių tarnautojai ir pan. Daug kartų per dieną nusileisdami žemyn į rūsį vedančių mažų laiptelių pakopomis, jie per keletą mėnesių nueina kilometrinius nuotolius. Nesunku išskaičiuoti, per kiek laiko rūsinio sandėlio tarnautojas nusileidžia žemyn tokį atstumą, kuris lygus vandenyno gyliui. Jeigu, pavyzdžiui, laiptai nusileidžia tiktai į 2 *m* gylį ir žmogus kasdien nulipa jais tiktai 10 kartų, tai per mėnesį jis nueis žemyn $30 \times 20 = 600$ *m* nuotolį, o per metus:

$$600 \times 12 = 7200 \ m, \text{ daugiau kaip } 7 \ km.$$

Prisiminsime, kad giliausia šachta įleista į žemės gelmes tik truputį daugiau kaip du kilometrus.

Reiškia, jeigu nuo vandenyno paviršiaus į jo dugną eitų laiptai, tai kiekvienas rūsinės prekybinės patalpos darbuotojas vandenyno dugną pasiektų per vienerius metus.

TRAKTORIUS APLINK PASAULĮ

Kiekvienas traktorius socialistiniuose mūsų kolūkių ir tarybinių ūkių laukuose dirba apie 2500 valandų per metus [1]. Vidutiniškai per valandą jis nueina 5 *km*. Vadinasi, jo metinis kelias yra:

$$5 \times 2500 = 12\,500 \ km.$$

Lengva apskaičiuoti, per kiek metų jis nueina kelią, lygų Žemės rutulio apskritimui:

$$40\,000 : 12\,500 = 3{,}2.$$

Per vieną penkmetį traktorius suspėja apie pusantro karto apkeliauti aplink Žemę.

Šiuo atžvilgiu jis aplenkia kiekvieną iš mūsų, nepastebimai atliekantį per 5 metus tiktai vieną kelionę aplink pa-

[1] Šitie duomenys liečia prieškarinius metus. — *Red.*

Traktorius per penkmetį spėja pusantro karto apvažiuoti aplink pasaulį.

saulį; tačiau jis atsilieka nuo savo draugo — garvežio (prekinio), kuris spėja mūsų Sąjungos geležinkeliais „apvažiuoti aplink pasaulį“ tiktai per 8 mėnesius (o keleivinis net per 6 mėnesius).

NEPAVARGSTANTIS RATUKAS

Keliautojas aplink pasaulį yra daugelio mūsų kišenėse — kišeninio laikrodžio viduje. Atidarykite užpakalinį kišeninio laikrodžio dangtelį ir įsižiūrėkite į jo mechanizmą. Visi dantyti jo ratukai taip pamažu sukasi, kad iš pradžių atrodo, kad jie visai nejuda. Reikia ilgai ir atidžiai sekti ratukus, norint pastebėti jų judesį. Išimtį sudaro tiktai mažytis smagratis — vadinamasis balansyras, — kuris nepavargdamas švytuoja pirmyn ir atgal. Jo judesiai yra tokie spartūs, kad sunku suskaičiuoti, kiek švytavimų jis padaro per sekundę: 5 kartus per sekundę jis pasisuka pakaitomis tai į vieną, tai į kitą pusę. O ratukas kiekvieną kartą padaro vieną pilną apsisukimą ir dar penktadalį.

Pabandykime apskaičiuoti, kiek apsisukimų jis padaro per ištisus metus. Juk tvarkingo žmogaus rankose laikrodis niekuomet nesustoja: jis neužmiršta jo laiku prisukti. Kiekvieną minutę ratukas padaro $5 \times 60 = 300$ švytavimų, o kiekvieną valandą $300 \times 60 = 18\,000$. Per parą tai sudaro:

$$18\,000 \times 24 = 432\,000 \text{ švytavimų.}$$

Imdami apvaliais skaičiais metuose 360 dienų, rasime, kad balansyras kasmet padaro:

$$432\,000 \times 360 = 155\,520\,000 \text{ švytavimų.}$$

Tačiau jau anksčiau minėjome, kad balansyras vieno švytavimo metu pasisuka per $1^1/_5$ pilno apsisukimo. Reiškia, per metus jis spėja apsisukti aplink savo ašį:

$$155\,520\,000 \times 1^1/_5 = 186\,624\,000 \text{ kartų,}$$

apvaliais skaičiais — 187 milijonus kartų.

Jau vienas šis milžiniškas skaičius yra pakankamai nuostabus. Jūs dar labiau nustebsite, atlikę kitą skaičiavimą: išskaičiuokite, kokį kelią nueitų automobilis, jeigu jo ratai apsisuktų 187 milijonus kartų. Automobilio rato skersmuo yra lygus 80 *cm*: reiškia, jo apskritimo ilgis — apie 250 *cm*, arba $2^1/_2$ *m*. Padauginę $2^1/_2$ iš 187 milijonų, gausime mums rūpimą kelio ilgį: apie 470 000 *km*. Vadinasi, automobilis, kurio ratai būtų tokie pat nepavargstą, kaip kišeninio laikrodžio balansyras, kasmet daugiau kaip 10 kartų apvažiuotų Žemės rutulį, arba — jeigu norite — nuvažiuotų didesnį kelią, negu nuo mūsų iki Mėnulio. Nesunku įsivaizduoti, kiek kartų tokios kelionės metu reikėtų taisyti ir net keisti automobilio ratus. O tuo tarpu mažytis kišeninio laikrodžio ratukas nenuilsdamas švytuoja daug metų netaisytas, naujai nepateptas, nepakeistas, ir dirba nuostabiai tiksliai. . .

TIE, KURIE KELIAUJA STOVĖDAMI VIETOJE

Paskutines knygos eilutes noriu paskirti jos pirmiesiems skaitytojams, be kurių aktyvaus bendradarbiavimo ji nebūtų buvusi išleista. Aš kalbu, suprantama, apie raidžių rinkėjus. Jie taip pat atlieka tolimas aritmetines keliones, neišeidami iš rinkyklos, net nejudamai stovėdami prie rinkimo kasų. „Švininės armijos“ darbininko vikri ranka, keliaujanti kas sekundė nuo kasos iki varstoto, per metus padaro milžinišką kelią.

Paskaičiuokite. Štai duomenys: per darbo dieną rinkėjas surenka 12 000 raidžių ir kiekvienai raidei turi ranką pakelti ten ir atgal vidutiniškai per pusės metro atstumą. Laikykime, kad metuose yra 300 darbo dienų.

$$2 \times 0{,}5 \times 12\,000 \times 300 = 3\,600\,000 \ m, \text{ t. y. } 3600 \ km.$$

Reiškia, per 11 darbo metų net ir raidžių rinkėjas, neatsitraukiantis nuo kasos, atlieka kelionę aplink pasaulį. „Nejudantis keliautojas aplink pasaulį“! Tai skamba kur kas originaliau, negu „pėsčiasis keliautojas aplink pasaulį“.

Nėra tokio žmogaus, kuris vienaip arba kitaip neatliko minėta prasme kelionės aplink pasaulį. Galima pasakyti, kad nuostabus yra ne tas žmogus, kuris atliko kelionę aplink pasaulį, bet tas, kuris jos neatliko. Ir jeigu kas nors stengsis jus įtikinėti, kad jis to neatliko, jūs, tikiuosi, sugebėsite „matematiškai“ jam įrodyti, kad jis nėra išimtis iš bendros taisyklės.

ATSAKYMAI

17 puslapiui

Rebusui Nr. 1 — dokumentas.
Rebusui Nr. 2 — gyventojas.
Rebusui Nr. 3 — erškėtynas.

53 puslapiui

1) 1146.
2) HH, kur H pažymi skaitmenį „13".

56 puslapiui

Penketainėje sistemoje: „1304", „1144", „2402".
Trejetainėje sistemoje: „2010", „10210", „110", „10"; liekana „11".

61 puslapiui

1) $2 \times 2 = 100$, kai 100 parašytas dvejetainėje sistemoje.
2) $2 \times 2 = 11$, kai parašyta trejetainėje sistemoje.
3) 10 — nelyginis skaičius, kai jis parašytas penketainėje sistemoje, o taip pat sistemose, kurių pagrindas yra 3, 7 ir 9.
4) $2 \times 3 = 11$, kai 11 parašyta penketainėje sistemoje.
5) $3 \times 3 = 14$, kai 14 parašyta penketainėje sistemoje.

62 puslapiui

Nr. 1 — pagal aštuonetainę.
Nr. 2 — pagal šešetainę.
Nr. 3 — skaičius 130 įvairiose skaičiavimo sistemose išreiškiamas tokiu būdu:

dvejetainėje	10000010
trejetainėje	11211
ketvertainėje	2002
penketainėje	1010

šešetainėje	. . . .	334
septynetainėje	. . . .	244
aštuonetainėje	. . . .	202
devynetainėje	. . . .	154

Nr. 4. Ketvertainėje sistemoje — 27; penketainėje — 38; šešetainėje — 51; septynetainėje — 66; aštuonetainėje — 83; devynetainėje — 102. Šitas skaičius negali būti parašytas nei dvejetainėje, nei trejetainėje sistemoje, nes į jį įeina skaitmuo 3, kurio šitose sistemose nėra. Šitas skaičius penketainėje sistemoje dalijasi iš 2, nes jo skaitmenų suma dalijasi iš 2. Septynetainėje sistemoje jis dalijasi iš 6, o devynetainėje nesidalija iš 4.

146 puslapiui

Uždavinio-pokšto atsakymas.

Skaičius, kuris dalijasi iš visų skaičių be liekanos, yra v i s ų s k a i č i ų s a n d a u g a.

TURINYS

PENKTASIS SKYRIUS

SKAITINIŲ KEISTENYBIŲ GALERIJA

ŠEŠTASIS SKYRIUS

POKŠTAI BE APGAULĖS

SEPTINTASIS SKYRIUS

GREITAS SKAIČIAVIMAS

AŠTUNTASIS SKYRIUS

CHEOPSO PIRAMIDĖS MATEMATINĖS MĮSLĖS

DEVINTASIS SKYRIUS

SKAIČIAI MILŽINAI

DEŠIMTASIS SKYRIUS

SKAIČIAI LILIPUTAI

VIENUOLIKTASIS SKYRIUS

ARITMETINIAI KURIOZAI